البرهان الاستدلالي

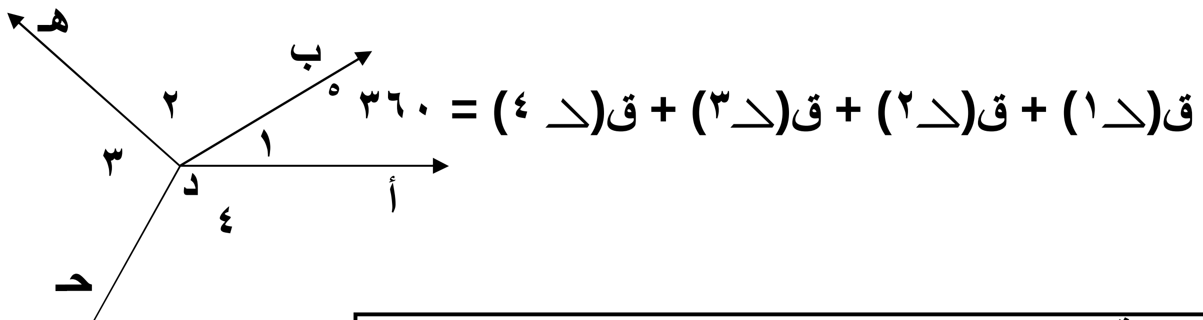
نظرية (١) :
إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متساويتان فى القياس.

∵ ٢ب ∩ د جـ = { م }

∴ ق(∠ ٢ م جـ) = ق(∠ د م ب) بالتقابل بالرأس

، ق(∠ ٢ م د) = ق(∠ جـ م ب) بالتقابل بالرأس

نظرية (٢) :
مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوى ٣٦٠ °



نظرية (٣) :
مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث يساوى ١٨٠ °

ملاحظات :

١ - الزاويتان المتكاملتان المتجاورتان يكون ضلعيهما المتطرفين على استقامة واحدة

∵ ق(∠ أ ب د) + ق(∠ د ب حـ) = ١٨٠ °

∴ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ على استقامة واحدة .

٢ - ا لزاويتان ا لمتجاورتان غيرا لمتكاملتان يكون ضلعيها ا لمتطرفان ليس على استقامة واحدة .

∵ ق(∠ أ م ب) + ق(∠ ب م حـ) ≠ ١٨٠ °

∴ $\overleftarrow{\text{م أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{م حـ}}$ ليس على استقامة واحدة .

مثال : فى ا لشكل ا لمقابل :

$\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{حـ د}$ = { م }

، م ن ينصف ∠ حـ م ب

، ق(∠ أ م د) = ١٤٨ °

إ حسب بالدرجات قياس

كل من ∠ حـ م أ ، ∠ أ م ن ، ∠ ن م د

البرهان :

∵ ق(∠ حـ م د) = ١٨٠ ° لأنها مستقيمة .

∴ ق(∠ حـ م أ) = ١٨٠ ° ــ ١٤٨ ° = ٣٢ °

∵ أ ب ∩ د جـ = { م }

∴ ق(∠ أ م د) = ق(∠ حـ م ب) = ١٤٨ ° بالتقابل بالرأس .

∵ م ن ينصف ∠ ب م حـ

∴ ق(∠ أ م ن) = ق(∠ ن م ب) = ١٤٨ ÷ ٢ = ٧٤

∵ ق(∠ أ م حـ) = ق(∠ د م ب) = ٣٢ ° بالتقابل بالرأس

∴ ق(∠ ن م د) = ق(∠ ن م ب) + ق (∠ ب م د)

= ٧٤ ° + ٣٢ ° =١٠٦

مثال:فى الشكل ا لمقابل :

ق(ب م̂ د) = ٣٠ ° ، ق(د م̂ هـ) = ٩٥ °

ق(ب م حـ) = ٩٠ °

إ حسب ق(حـ م̂ هـ)

ثم أ وجد ق(حـ م̂ هـ)المنعكسة

ثم أثبت أن: م ب ، م هـ ليس على استقامة واحدة

البرهان :

∵ مجموع قياسات ا لزوا يا ا لمتجمعة حول نقطة = ٣٦٠ °

∴ ق(حـ م̂ هـ) = ٣٦٠ ° ــ (٩٠ ° + ٣٠ ° + ٩٥ °)

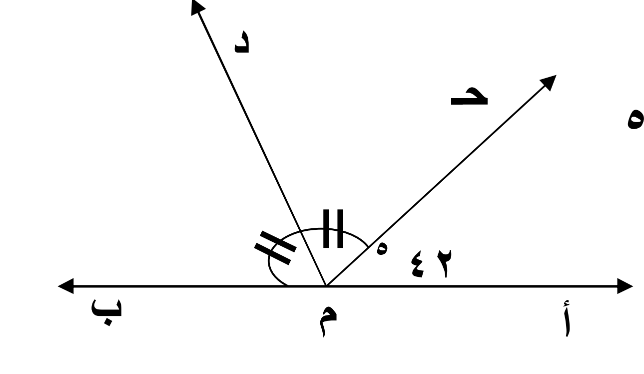
= ٣٦٠ ° ــ ٢١٥ ° = ١٤٥ °

∴ ق(حـ م̂ هـ) المنعكسة = ٣٦٠ ° ــ ١٤٥ ° = ٢١٥ °

∵ ق(ب م̂ د) + ق(د م̂ هـ) = ٣٠ ° + ٩٥ ° = ١٢٥ ° ≠ ١٨٠ °

∴ م ب ، م هـ ليس على استقامة واحدة .

مثال: فى الشكل المقابل :



م ∈ أ ب ، ق(∠ أ م حـ) = ٤٢ °

، م د ينصف ∠ ب م حـ

أوجد : ق(∠ ب م حـ)

البرهان :

∵ م ∈ أ ب

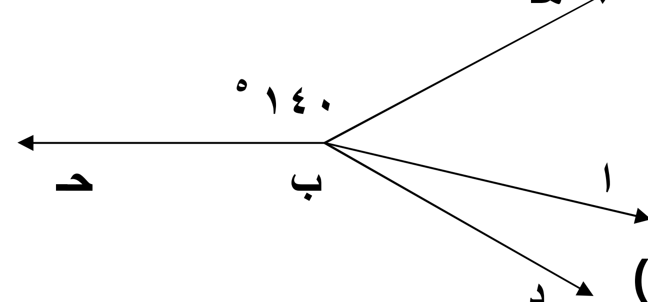
∴ ق(∠ أ م حـ) + ق(∠ حـ م ب) = ١٨٠

∴ ٤٢ + ق(∠ حـ م ب) = ١٨٠ ــ ٤٢ = ١٣٨

∵ م د ينصف ∠ ب م حـ

∴ ق(∠ ب م د) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م حـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٣٨ ° = ٦٩ °

مثال: فى الشكل المقابل :



ق(∠ هـ ب حـ) = ١٤٠ °

، ق(∠ د ب هـ) = ٩٠ °

، ق(∠ أ ب هـ) = ٢ ق(∠ أ ب د)

أثبت أن : ب أ ، ب حـ ليس على استقامة واحدة

البرهان : ∵ ق(∠ د ب هـ) = ٩٠ ° ، ق(∠ أ ب هـ) = ٢ ق(∠ أ ب د)

∴ ق(∠ أ ب د) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ أ ب هـ)

∵ ق(∠ أ ب هـ) + ق(∠ أ ب د) = ٩٠

∴ ٢ ق(∠ أ ب د)+ ق(∠ أ ب د) = ٩٠

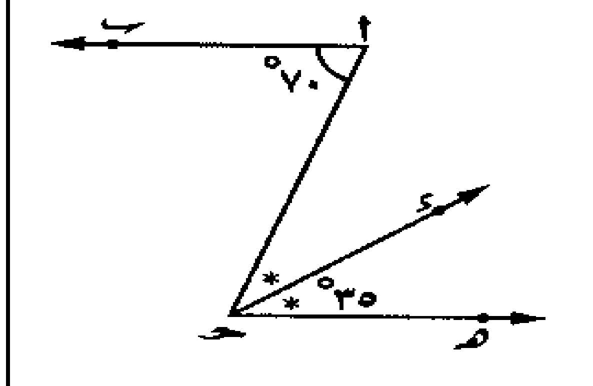
∴ ٣ ق(∠ أ ب د) = ٩٠ ∴ ق(∠ أ ب د) = ٩٠ ÷ ٣ = ٣٠

∴ ق(∠ أ ب هـ) = ٩٠ − ٣٠ = ٦٠

∵ ق(∠ أ ب هـ) + ق(∠ هـ ب حـ) = ٦٠ + ١٤٠ = ٢٠٠

∴ ب أ ، ب حـ ليس على استقامة واحدة .

مثال : في الشكل المقابل :



حـ ء ينصف ∠ أ حـ هـ

، ق (∠ ب أ حـ) = ٧٠°

، ق (∠ ء حـ هـ) = ٣٥°

أثبت أن : أ ب // حـ هـ

البرهان : ∵ جـ د ينصف ∠ أ جـ هـ

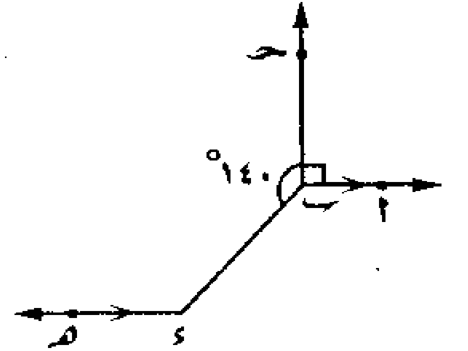
∴ ق{∠ هـ جـ د } = ق{∠ د جـ أ} = ٣٥ °

∴ ق{ ∠ أ جـ هـ } = ٧٠ °

∵ ق{ ∠ ب أ جـ } = ق{∠ أ جـ هـ } = ٧٠ ° و هما في وضع تبادل

∴ أ ب] جـ هـ

مثال :في الشكل المقابل :



ب أ // ء هـ ، ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°

، ق (∠ حـ ب ء) = ١٤٠°

أوجد : ق (∠ ب ء هـ)

البرهان : ∵ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠ °

∴ ق{∠ أ ب د} = ٣٦٠ ° - (٩٠ + ١٤٠) = ٣٦٠ − ٢٣٠ = ١٣٠ °

∵ ب أ] د هـ ، ب د قاطع لهم

∴ ق{ ∠ أ ب د } = ق{∠ ب د هـ } = ١٣٠ °

إعداد / خالد المنفلوطي ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

مثال : فى الشكل المقابل :

أب ∩ جـ د = { هـ } ، د هـ = جـ هـ ، أ هـ = ب هـ

١- اثبت أن : Δ أ هـ د ≡ Δ ب هـ جـ

٢- برهن أن : أ د // جـ ب

البرهان : ΔΔ أ هـ د ، ب هـ جـ

١- د هـ = جـ هـ

٢- أ هـ = ب هـ

٣- ق(∠ ب هـ جـ) = ق(∠ أ هـ د) بالتقابل بالرأس

∴ ينطبق المثلثان و نجد أن : ق(∠ أ) = ق(∠ ب) و هما فى وضع التبادل

∴ أ د // جـ ب

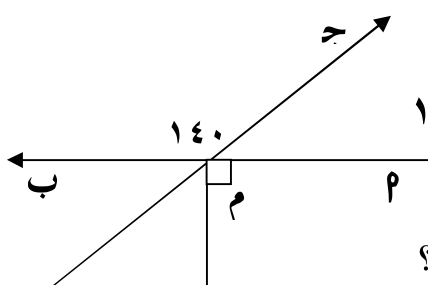
تمارين على البرهان الاستدلالى

[١] فى الشكل المقابل : *

م ∈ أب ، م هـ ⊥ أب ، ق(∠ جـ م ب) = ١٤٠ ، ق(∠ ب م د) = ٤٠

١- هل م جـ ، م د على استقامة واحدة ؟ و لماذا ؟

٢- أوجد : ق(∠ هـ م د)



[٢] فى الشكل المقابل :

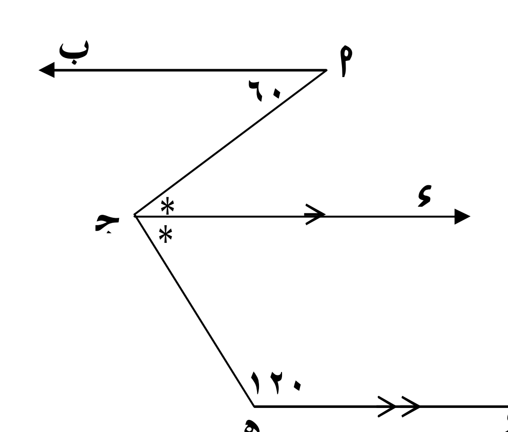
ق(∠ أ جـ ء) = ق(∠ ء جـ هـ)

، جـ ء // هـ و ، ق(∠ أ) = ٦٠°

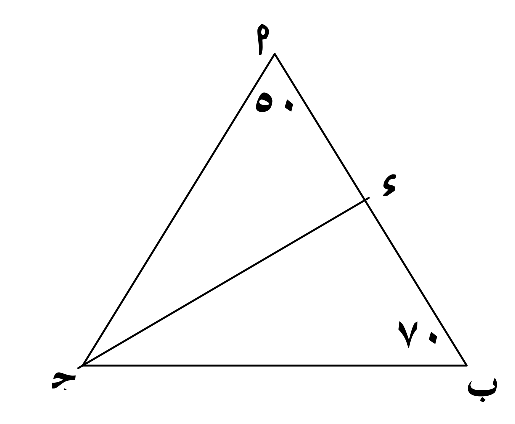
، ق(∠ هـ) = ١٢٠°

١- أوجد : ق(∠ ء جـ هـ)

٢- اثبت أن : أ ب // جـ ء



إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

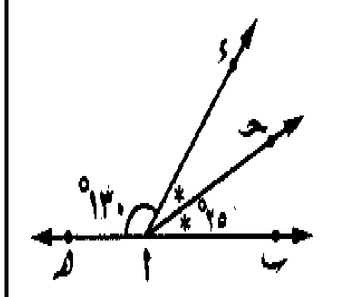


[٣] فى الشكل المقابل :

ق{∠م} = ٥٠° ، ق{∠ب} = ٧٠°

، جـ ء ينصف ∠م جـ ب

أوجد : ق{∠ب ء جـ}



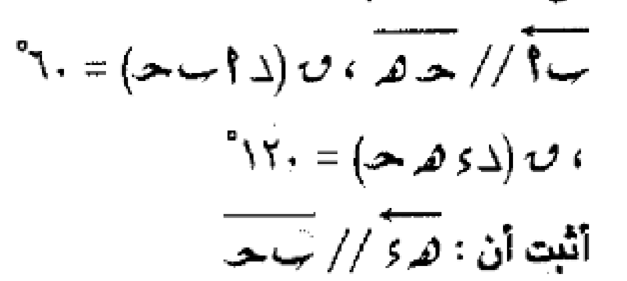
[٤] في الشكل المقابل :

ق(∠ب أ جـ) = ٢٥° ، أجـ ينصف ∠ب أ ء

، ق(∠ء أ هـ) = ١٣٠°

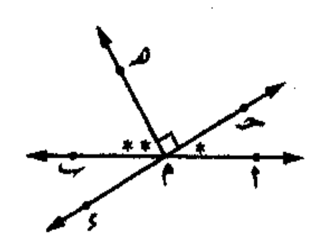
أثبت أن : النقط ب ، أ ، هـ على استقامة واحدة.

[٥] في الشكل المقابل :

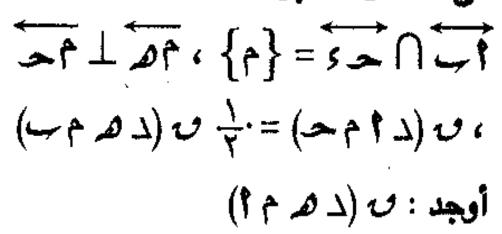

ب أ // جـ هـ ، ق(∠أ ب جـ) = ٦٠°

، ق(∠ء هـ جـ) = ١٢٠°

أثبت أن : هـ ء // ب جـ

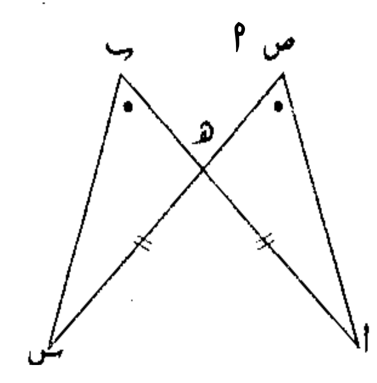


[٦] في الشكل المقابل :


أب ∩ جـ ء = {م} ، م هـ ⊥ م جـ

، ق(∠أ م جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠هـ م ب)

أوجد : ق(∠هـ م أ)



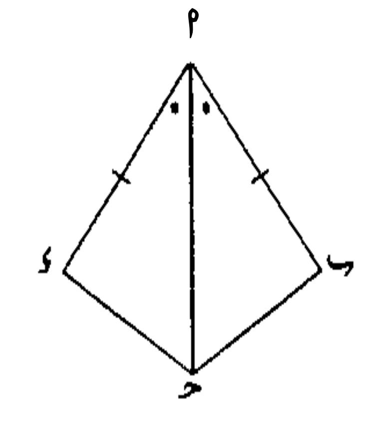
[٧] فى الشكل المقابل :

أب ∩ س ص = {هـ}

أ هـ = س هـ ، ق(ص^) = ق(ب^)

أثبت أن Δ أ س ص ≡ Δ س ب هـ

إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١



[٨] **فى الشكل المقابل :**

الشكل ا ب جـ د فيه ا ب = ا د

$\overleftarrow{\text{اجـ}}$ ينصف ب $\hat{\text{ا}}$ د

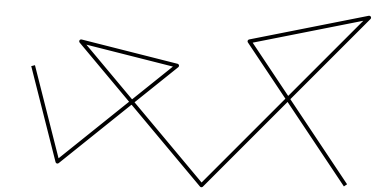
أثبت أن ب جـ = د جـ

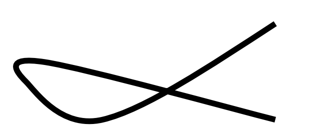
المضلعات

(١) الخط البسيط : هو خط لا يقطع نفسه .

(٢) الخط غير البسيط : هو خط يقطع نفسه مرة أو أكثر .



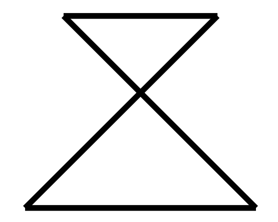


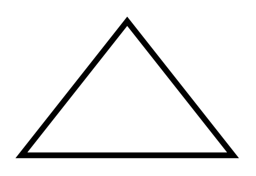


(١) الخط المفتوح : هو خط لا ينتهي عند النقطة التي بدأ منها .

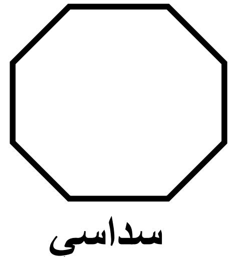
(٢) الخط المغلق : هو خط ينتهي عند النقطة التي بدأ منها .



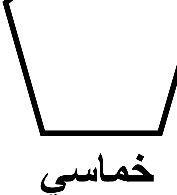




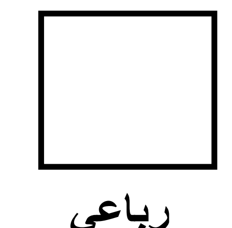
(٣) المضلع : هو خط بسيط مغلق يتكون من اتحاد عدة قطع مستقيمة .



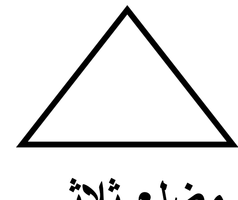
سداسي



خماسي



رباعي

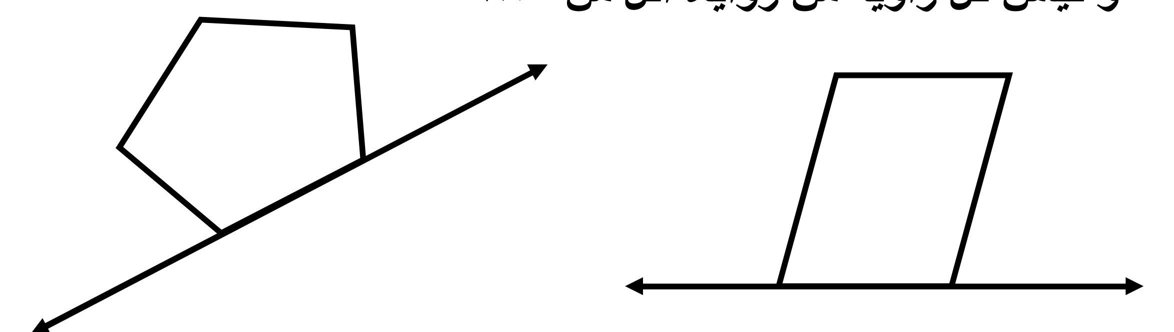


مضلع ثلاثي

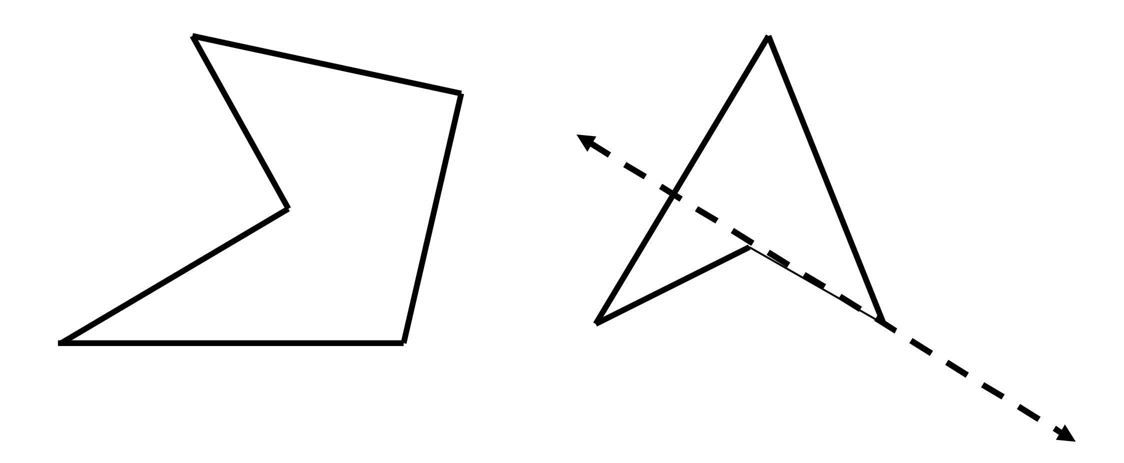
(٤) رأس المضلع : هي نقطة ناتجة من تقاطع ضلعين (قطعتين في المضلع)
(٥) ضلع المضلع : هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين متتاليين .
(٦) قطر المضلع : هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين .

ملحوظة : عدد أقطار المثلث = صفر ، عدد أقطار الشكل الرباعي = ٢
عدد أقطار الشكل الخماسي = ٥ ، عدد أقطار الشكل السداسي = ٩

(٧) **أنواع المضلع** :
(أ) المضلع المحدب : هو مضلع إذا مر برأسين متتاليين مستقيم تكون بقية الرؤوس واقعة في أحد جانبي هذا المستقيم .
و قياس كل زاوية من زواياه أقل من ١٨٠ °



(ب) المضلع المقعر : إذا مر مستقيم برأسين متتاليين و كانت بقية الرؤوس تقع علي جانبي المستقيم و قياس إحدى زواياه أكبر من ١٨٠ °



(١٠) عدد رؤوس المضلع = عدد أضلاعه = عدد زواياه

(١١) محيط المضلع = مجموع أطوال أضلاعه

سؤال للتفكير

أكمل ما يأتي :

(١) المضلع هو خط ...... يتكون من عدة ..... تسمي ......
(٢) القطر هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسيين ....
(٣) الضلع هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسيين ....
(٤)الخط البسيط هو ...... ، الخط غير البسيط هو ....
(٥) عدد أقطار الشكل الرباعى = ... ، عدد أقطار المضلع السداسى = ...
(٦) عدد رؤوس المضلع = عدد .... = عدد .....

* إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخلة لأي مضلع *

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الذي عدد أضلاعه ن
= (ن ـ ٢) × ١٨٠ °

مثلا : المضلع الثلاثي (المثلث) : ن = ٣
مجموع قياسات زواياه = (٣ ـ ٢) × ١٨٠
= ١× ١٨٠ = ١٨٠

المضلع الرباعي : ن = ٤
مجموع قياسات زواياه = (٤ ـ ٢) × ١٨٠
= ٢ × ١٨٠ = ٣٦٠

المضلع الخماسي : ن = ٥
مجموع قياسات زواياه = (٥ ـ ٢) × ١٨٠
= ٣ × ١٨٠ = ٥٤٠

و هكذا باقي المضلعات ....

- **المضلع المنتظم : هو مضلع يتوفر فيه شرطان معاً**
  (١) جميع أضلاعه متساوية في الطول
  (٢) جميع زواياه متساوية في القياس

• قياس الزاوية الداخلة للمضلع المنتظم :

قياس كل زاوية من زواياه مضلع منتظم عدد أضلاعه ن

$$= \frac{(ن - ٢)}{ن} \times ١٨٠$$

مثلا : المضلع الثلاثي المنتظم (المثلث المتساوي الأضلاع)

قياس كل زاوية من زواياه = $\frac{(ن - ٢)}{ن} \times ١٨٠$

$$= \frac{(٣ - ٢)}{٣} \times ١٨٠$$

$$= \frac{١}{٣} \times ١٨٠ = ٦٠$$

المضلع الرباعي المنتظم (المربع) : ن = ٤

قياس كل زاوية من زواياه = $\frac{(٤ - ٢)}{٤} \times ١٨٠$

$$= \frac{٢}{٤} \times ١٨٠ = ٩٠$$

المضلع السداسي المنتظم (المسدس): ن = ٦

قياس كل زاوية من زواياه = $\frac{(٦ - ٢)}{٦} \times ١٨٠$

$$= \frac{٤}{٦} \times ١٨٠ = ١٢٠$$

مثال : مضلع ثماني منتظم طول ضلعه = ٦ سم أوجد قياس زاويته ومحيطه

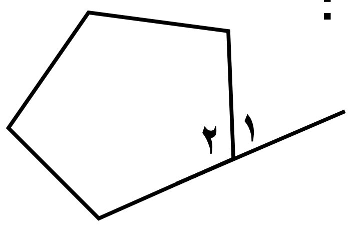
الحل :

مضلع ثماني منتظم : ن = ٨ ، قياس زاويته = $\frac{(ن - ٢)}{ن} \times ١٨٠$

$$= \frac{(٨ - ٢)}{٨} \times ١٨٠ = \frac{٦}{٨} \times ١٨٠ = ١٣٥$$

محيط المضلع الثماني المنتظم = ن × طول ضلعه = ٨ × ٦ = ٤٨ سم

- **مجموع قياسات الزوايا الخارجة لمضلع عدد أضلاعه ن :**



عند أى رأس من رءوس مضلع نجد أن :

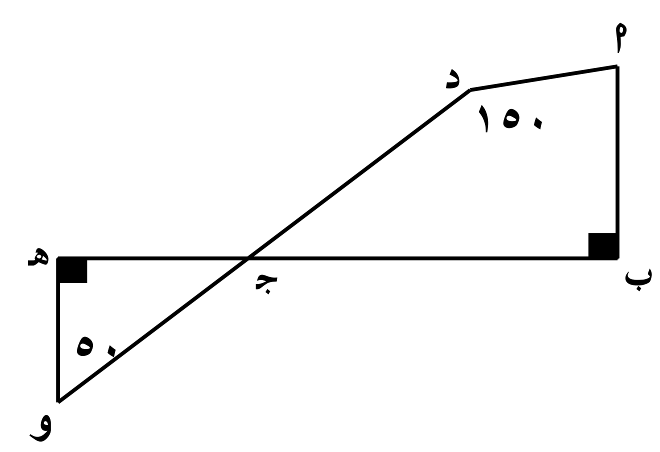
مجموع قياسى الزاويتين الداخلة و الخارجة = ١٨٠ °

ق(∠ ١) + ق(∠ ٢) = ١٨٠ °

لأى مضلع محدب عدد أضلاعه ن :

مجموع قياسات الزوايا الخارجة + مجموع قياسات الزوايا الداخلة = ن × ١٨٠

مجموع قياسات الزوايا الخارجة لمضلع محدب عدد أضلاعه ن = ٣٦٠ °



مثال : فى الشكل المقابل :

ق(∠م)=٨٠ ° ، ق(∠ د)= ١٥٠

، ق(∠ب)= ق(∠هـ)=٩٠ °

، ق(∠و)= ٥٠ °

أوجد : ق(∠م)

الحل :

فى △ جـ هـ و : ∵ ق(∠هـ)=٩٠ ° ، ق(∠و)= ٥٠ °

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ ـ (٩٠ + ٥٠) = ١٨٠ -١٤٠ = ٤٠

∵ ب هـ ∩ د و = { جـ }

∴ ق(∠ د جـ و) = ق(∠ هـ جـ و) = ٤٠ **بالتقابل بالرأس**

∵ مجموع الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠ °

∴ ق(∠م) = ٣٦٠. (٩٠ + ٤٠ + ١٥٠)

= ٣٦٠ ـ ٢٨٠= ٨٠

ملاحظة :

عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه س° = $\frac{٣٦٠ °}{١٨٠ - س°}$

إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

مثال : مضلع منتظم قياس إحدى زواياه الداخلة ١٤٤ ° ، أوجد عدد أضلاعه .

الحل :

عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه ١٤٤ ° = $\frac{٣٦٠ °}{١٨٠ - ١٤٤}$

= $\frac{٣٦٠}{٣٦}$

= ١٠ أضلاع

مثال: أ ب جـ ء شكل رباعى فيه ق(أ) : ق(ب) : ق(جـ) : ق(ء) = ١ : ٢ : ٤ : ٥

أوجد قياس جميع زواياه

الحـــــــــل

- ق (أ) = $\frac{١}{١٢}$ × ٣٦٠° = ٣٠°
- ق(ب) = $\frac{٢}{١٢}$ × ٣٦٠° = ٦٠°
- ق(جـ) = $\frac{٤}{١٢}$ × ٣٦٠° = ١٢٠°
- ق(ء) = $\frac{٥}{١٢}$ × ٣٦٠° = ١٥٠°

سؤال للتفكير

(١) مضلع سداسي منتظم طول ضلعه ٧ سم أوجد مجموع قياسات زواياه و قياس كل زاوية من زواياه ثم أوجد محيطه .

(٢) أكمل ما يأتي :
(أ) المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه ١٢ يكون قياس زاويته .... °
(ب) المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه ٨ يكون مجموع زواياه .... °

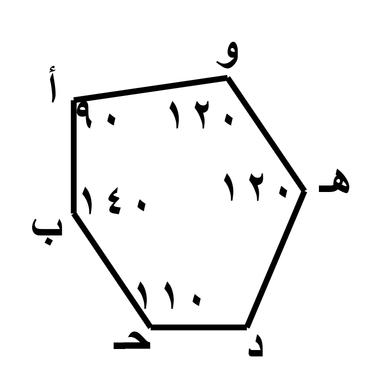
(٣) في الشكل المقابل : أ ب حـ د هـ و شكل سداسي

فيه أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٤ سم

حـ د = ٣، ٥ سم ، د هـ = ٢ سم

هـ و = ١، ٥ سم ، و أ = ٣ سم

أوجد ق ($\hat{د}$) ثم أوجد محيط الشكل

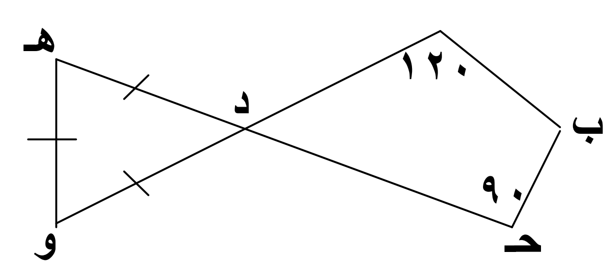


(٤) مضلع ثمانى منتظم طول ضلعه ٥ سم أوجد قياس زاويته و محيطه.

(٥) فى الشكل المقابل :

د هـ و مثلث متساوى الاضلاع

أوجد : ق(∠ب)



(٦) أوجد عدد أضلاع مضلع محدب منتظم قياس إحدى زواياه ١٢٠

المثلث

نظرية : مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث يساوي ١٨٠ °

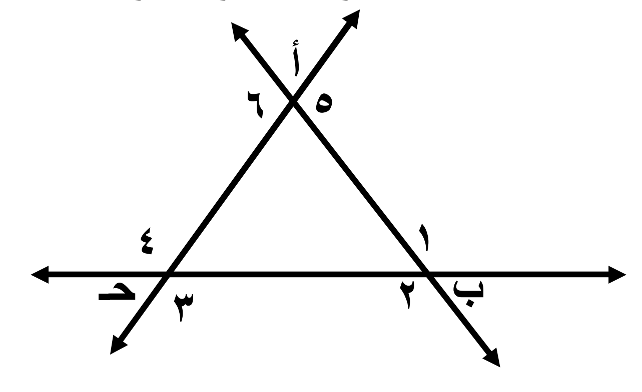
ق(∠ب)= ١٨٠ – (٣٠ + ٧٠) = ١٨٠ – ١٠٠ = ٨٠

ملاحظة : إذا علم قياس زاويتين يمكن إيجاد قياس الزاوية الثالثة

الزاوية الخارجة للمثلث: هي زاوية ناتجة من امتداد ضلع وتقاطع ضلع آخر فيه

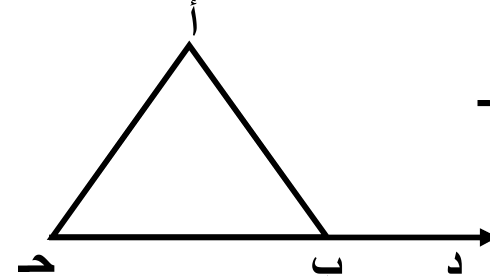
الزوايا الخارجة عن المثلث أ ب حـ

($\hat{١}$ ، $\hat{٢}$ ، $\hat{٣}$ ، $\hat{٤}$ ، $\hat{٥}$ ، $\hat{٦}$)



نتائج علي النظرية :

[١] قياس أي زاوية خارجة للمثلث تساوي مجموع قياس الزاويتين الداخلتين عدا قياس المجاورة لها .



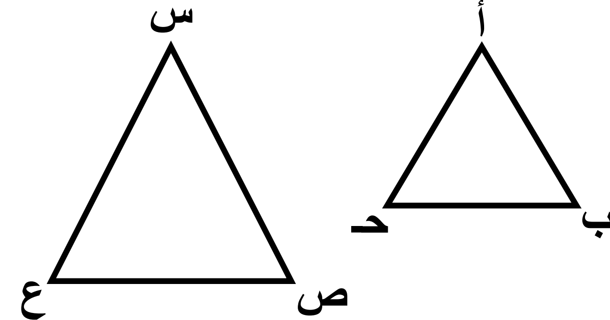
∵ ∠ أ ب حـ زاوية خارجة عن المثلث أ ب حـ

∴ ق(أ ب̂ د) = ق (أ̂) + ق (حـ̂)

ملحوظة :

قياس الزاوية الخارجة للمثلث أكبرمن قياس أى زاوية داخلة للمثلث عدا المجاورة لها

[٢] إذا ساوت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر في القياس كان قياس الزاوية الثالثة من المثلث الأول مساوياً لقياس الزاوية الثالثة من المثلث الآخر



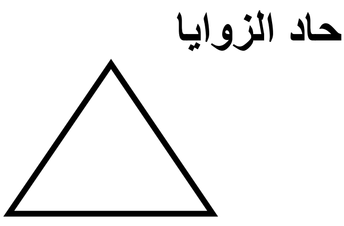
إذا كان: ق (ب̂) = ق (ص̂)

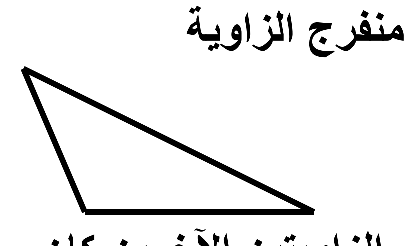
، ق (حـ̂) = ق (ع̂)

فإن : ق (أ̂) = ق (س̂)

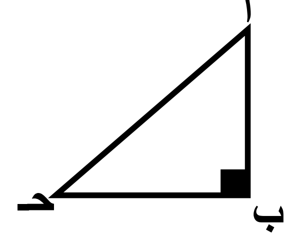
[٣] في آي مثلث توجد زاويتان حادتان علي الأقل .

حاد الزوايا قائم الزاوية منفرج الزاوية





[٤] إذا ساوي قياس زاوية في مثلث مجموع قياس الزاويتين الآخرين كان المثلث قائم الزاوية .



إذا كان ق (ب̂) = ق (أ̂) + ق (حـ̂)

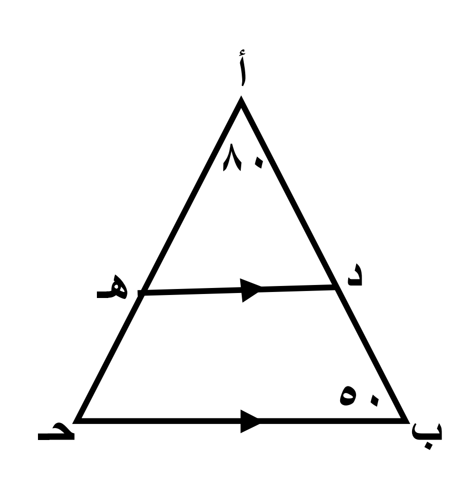
فإن ق (ب̂) = ٩٠ °

لان ق(أ̂) + ق(ب̂) + ق(حـ̂) = ١٨٠ °

مثال : في الشكل المقابل :

أ ب ﺟ مثلث فيه ق (أ̂) = ٨٠ ° ، ق (ب̂) = ٥٠ ، د هـ // ب ﺣ

احسب قياسات زوايا كل من المثلثين أ د هـ ، أ ب ﺣ بالدرجات .



البرهان : △ أ ب ﺣ

∵ مجموع الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠

∴ ق (ﺣ̂) = ١٨٠ ـ (٨٠ + ٥٠)

= ١٨٠ ـ ١٣٠ = ٥٠

∵ د هـ // ب ﺣ ، أ ب قاطع لهما

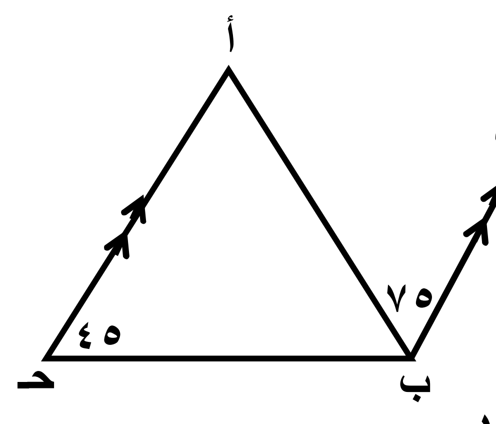
∴ ق (أ د̂ هـ) = ق (أ ب̂ ﺣ) = ٥٠ بالتناظر

∴ ق (أ هـ̂ د) = ١٨٠ ـ (٨٠ + ٥٠ = ١٨٠ ـ ١٣٠ = ٥٠

مثال : في الشكل المقابل :

ب د // ﺣ أ ، ق(د ب̂ أ) = ٧٥

ق(ﺣ̂) = ٤٥ ، احسب ق (أ ب ﺣ)



الحل : ∵ ب د // ﺣ أ ، أ ب قاطع لهما

∴ ق(د ب̂ أ) = ق (ب أ̂ ﺣ) = ٧٥ بالتبادل

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

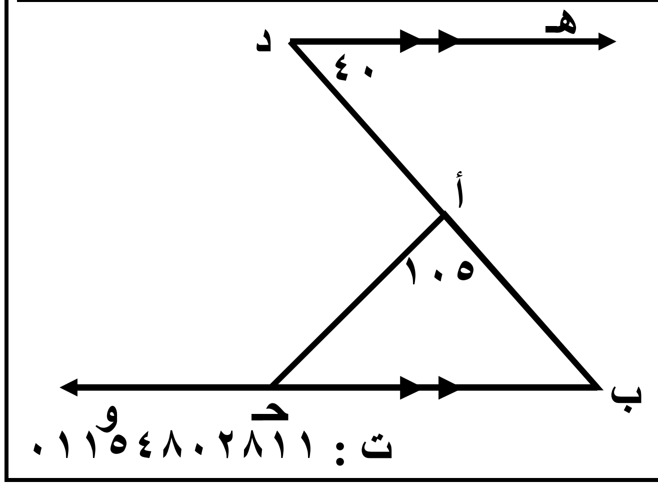
∴ ق (أ ب̂ ﺣ) = ١٨٠ ـ (٧٥ + ٤٥) = ١٨٠ ـ ١٢٠ = ٦٠

مثال : في الشكل المقابل :

د هـ // ب و ، ق (د̂) = ٤٠

، ق (ب أ̂ ﺣ) = ١٠٥

احسب قياس ∠ أ ﺣ و



إعداد / خالد المنفلوطي ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

البرهان :

∵ د هـ // ب و ، د ب قاطع لهما

∴ ق(هـ د̂ ب) = ق (ب̂) = ٤٠ بالتبادل

∵ أ حـ̂ و خارجة عن المثلث أ ب حـ

∴ ق (أ حـ̂ و) = ق (ب أ̂ حـ) + ق (ب̂)

= ١٠٥ + ٤٠ = ١٤٥

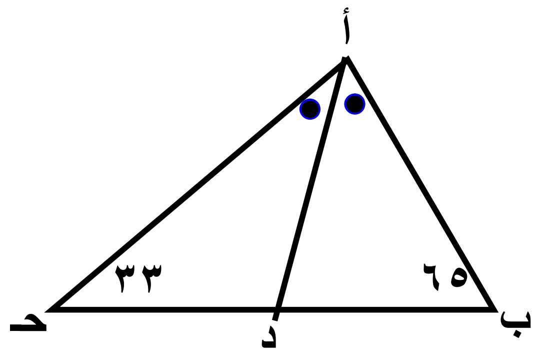
مثال : في الشكل الموضح :

أ ب حـ مثلث فيه

أ د ينصف ب أ̂ حـ ، ق(ب̂) = ٦٥

، ق (حـ̂) = ٣٣

أوجد قياس كل من أ د̂ ب ، أ د̂ حـ



البرهان : ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث أ ب حـ = ١٨٠

∴ ق(ب أ̂ حـ) = ١٨٠ ـ (٦٥ + ٣٣)

= ١٨٠ ـ ٩٨ = ٨٢

∵ أ د ينصف ب أ̂ حـ

∴ ق (ب أ̂ د) = ق (حـ أ̂ د) = $\frac{٨٢}{٢}$ = ٤١

△ أ ب د : ق(أ د̂ ب) = ١٨٠ ـ (٦٥ + ٤١)

= ١٨٠ ـ ١٠٦ = ٧٤

△ أ د حـ : ق (أ د̂ حـ) = ١٨٠ ـ (٣٣ + ٤١)= ١٨٠ ـ ٧٤ = ١٠٦

مثال الشكل المقابل :

ب هـ ينصف ∠ أ ب حـ ، ق(∠ ب أ د) = ٨٤

، ق(∠ حـ) = ٤٦ أوجد : ق(∠ أ هـ ب)

د

أ ٨٤

هـ

٤٦

حـ ب

إعداد / خالد المنفلوطي ت : ٠١١١٥٤٨٠٢٨١١

البرهان :

∵ ∠ د أ ب خارجة عن المثلث أ ب حـ

∴ ق(∠ د أ ب) = ق(∠ ب) + ق(∠ حـ)

∴ ق(∠ ب) = ٨٤ ـ ٤٦ = ٣٨

∵ $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ ب

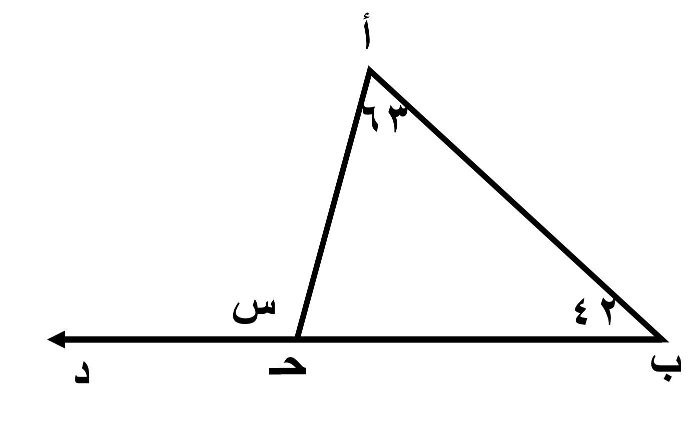
∴ ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠هـ ب حـ) = $\frac{٣٨}{٢}$ = ١٩

∵ ∠ د أ ب خارجة عن المثلث أ ب هـ

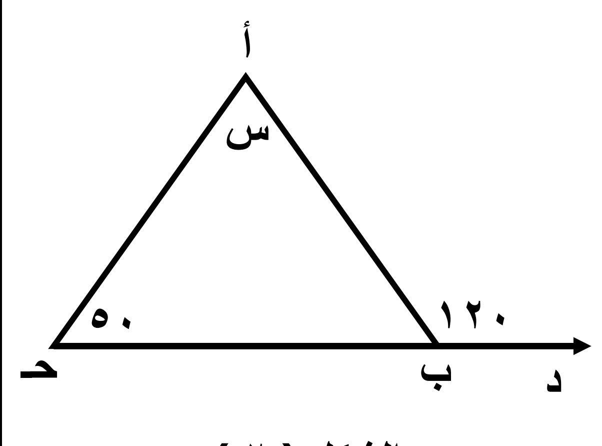
∴ ق(∠ أ هـ ب) = ٨٤ ـ ١٩ = ٦٥

سؤال للتفكير

(١) في الأشكال الآتية احسب قياس الزاوية س مع بيان السبب :



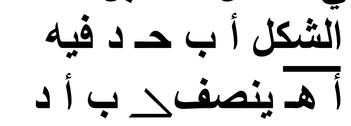
الشكل (١)



الشكل (٢)

---

[٢] في الشكل المقابل :



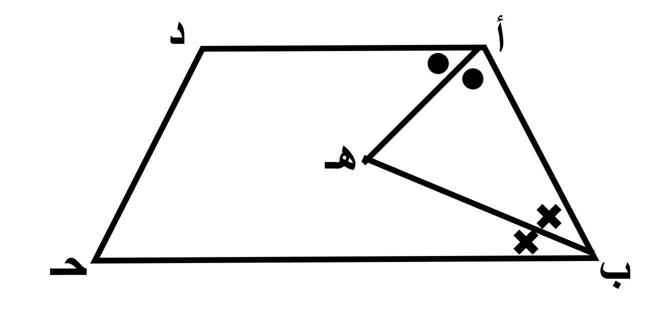
الشكل أ ب حـ د فيه

$\overline{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ د

، $\overline{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب حـ

، $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

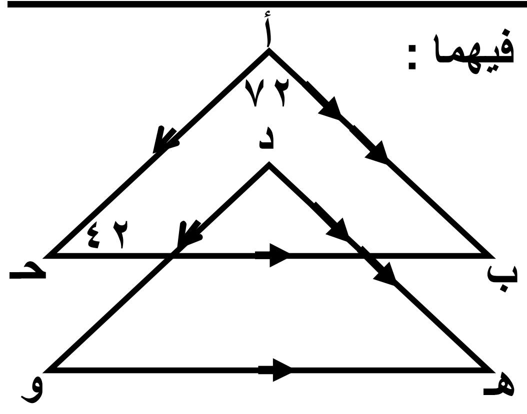
اثبت أن : $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب هـ}}$



إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

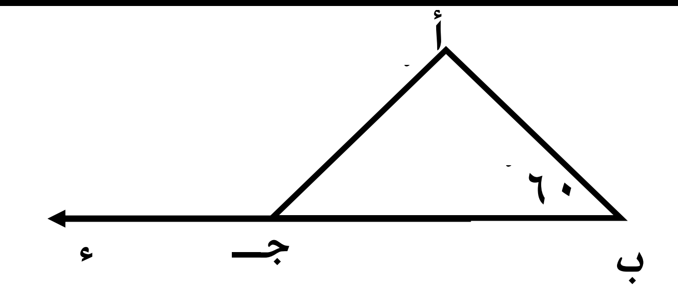
[٣] في الشكل المقابل : أ ب حـ ، د هـ ومثلثان فيهما :
أ ب // د هـ ، أ حـ // د و
، ب جـ // هـ و
، ق(أ^) = ٧٢ ، ق (حـ^) = ٤٨

احسب قياسات الزوايا الداخلة للمثلث د هـ و



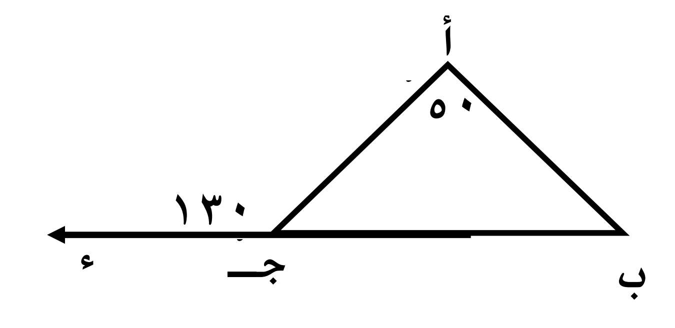
[٤] فى الشكل المقابل

ق (أ جـ^ ء) = ...



[٥] فى الشكل المقابل

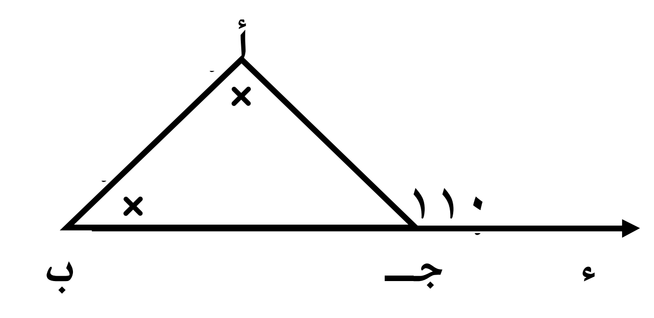
ق (∠ ب) = ...



[٦] فى الشكل المقابل

ق (∠ أ) = ق (∠ ب)

، ق (∠ أ جـ ء) = ١١٠°

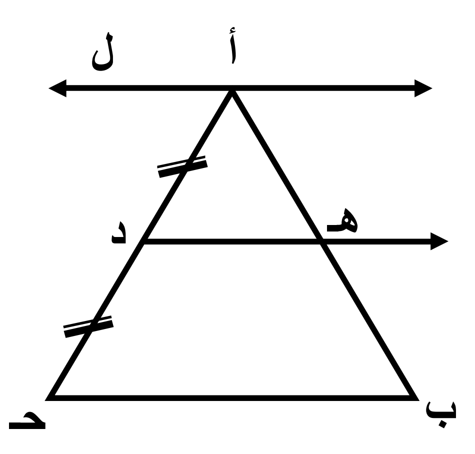


فإن ق (∠ أ) = ...، ق(∠ ب) = ... ، ق (∠ أ جـ ب) = ...

إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

نظرية :

الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى مثلث موازيا أحدا لضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث



المعطيات : أ د = د حـ ، د هـ] ب حـ

العمل : نرسم مستقيما ل يمر بالنقطة أ بحيث ل] ب حـ

المطلوب : إثبات أن : أ هـ = هـ ب

البرهان :

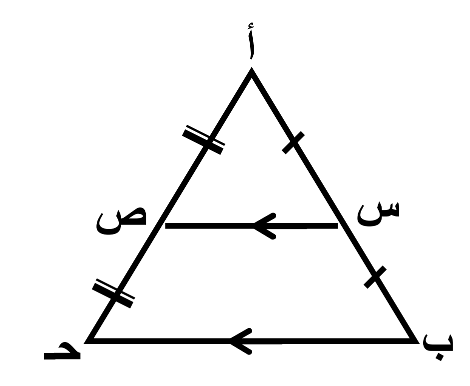
∵ ل] د هـ] ب حـ ، أ حـ ، أ ب قاطعان لها

حيث أ د = د حـ

∴ أ هـ = هـ ب

نتيجة :

القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث .

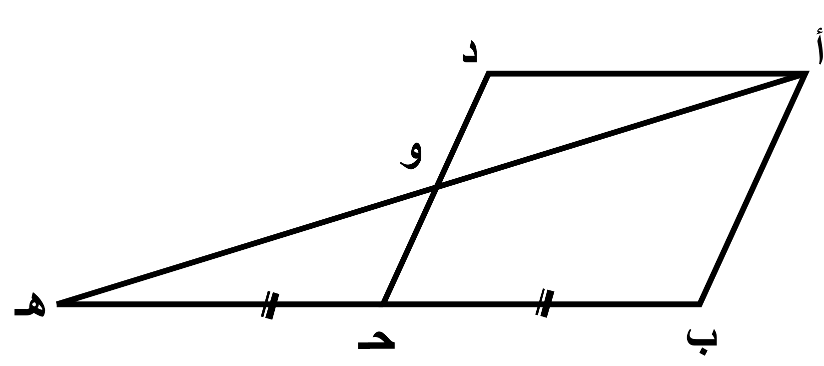


∵ س ص مرسومة بين منصفي أ ب ، أ حـ

∴ س ص] ب حـ

مثال : في الشكل المقابل : أ ب حـ د متوازي أضلاع ، ب حـ = حـ هـ

أثبت أن : أ و = و هـ



البرهان :

∵ أ ب حـ د متوازي أضلاع ∴ أ ب] د حـ ∴ أ ب] حـ و

∵ حـ منتصف ب هـ في المثلث أ ب هـ ∴ أ و = و هـ

إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

مثال : أ ب حـ د شكل رباعي فيه س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع أ ب، ب حـ ، حـ د ، د أ علي الترتيب

برهن أن : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع

الحل : نرسم أ حـ ، ب د

∆ أ ب د :

∵ س ل مرسومة بين منتصفي أ ب ، أ د

∴ س ل [ب د (١)

∆ ب حـ د :

∵ ص ع مرسومة بين منتصفي حـ ب ، حـ د

∴ ص ع [ب د (٢)

∆ أ ب حـ ∵ س ص مرسومة بين منتصفي أ ب ، ب حـ

∴ س ص [أ حـ (٣)

∆ أ د حـ : ∵ ل ع مرسومة بين منتصفي أ د ، د حـ

∴ ل ع [أ حـ (٤)

من ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نجد أن :

س ل [ص ع ، س ص [ل ع ∴ س ص ع ل متوازي الأضلاع

مثال : أ ب حـ د معين فيه هـ ، و ، ز ، ح منتصفات الأضلاع أ ب ، ب حـ ، حـ د ، د أ علي الترتيب أثبت أن : الشكل هـ و ز ح مستطيل .



الحل : نرسم أ حـ ، ب د

∆ أ ب د :

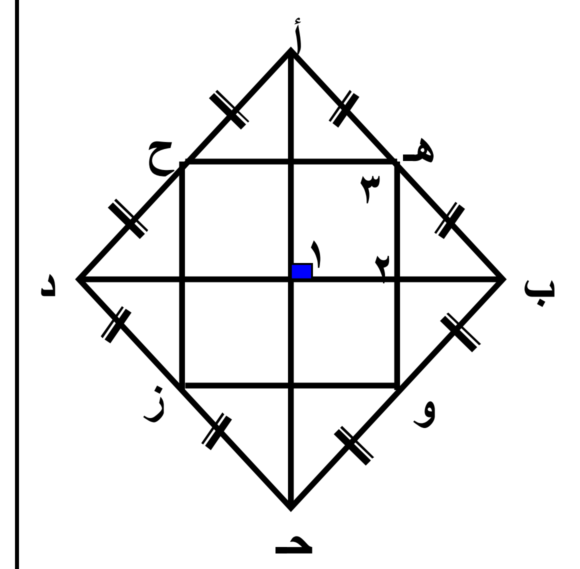
∵ هـ ح مرسومة بين منتصفي أ ب ، أ د

∴ هـ ح [ب د (١)

∆ ب حـ د :

∵ و ز مرسومة بين منتصفي ب حـ ، حـ د

∴ و ز [ب د (٢)



بالمثل : نجد أن هـ و // أ حـ (٣)

ح ز // أ حـ (٤)

∵ هـ و // ح ز ، هـ ح // و ز ∴ هـ و ز ح متوازي أضلاع

∵ أ ب حـ د معين ∴ قطراه متعامدان

∵ أ حـ ⊥ ب د ∴ ق (∠ ١) = ٩٠

∵ هـ و ⊥ أ حـ ∴ ق (∠ ٢) = ٩٠

∵ هـ ح // ب د ∴ ق (∠ ٣) = ٩٠

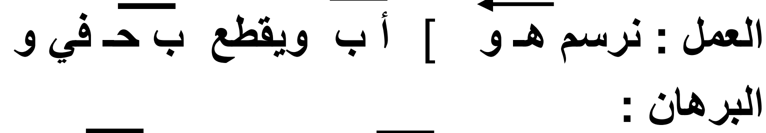
∴ هـ و ز ح مستطيل

نظرية :

طول القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث يساوى نصف طول الضلع الثالث .

المعطيات : أ د = د ب ، أ هـ = هـ حـ

المطلوب : أثبت أن : د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ



العمل : نرسم هـ و // أ ب ويقطع ب حـ في و

البرهان :



∵ د منتصف أ ب ، هـ منتصف أ حـ

∴ د هـ // ب حـ (نتيجة)

∵ هـ و // أ ب ، أ هـ = هـ حـ ∴ حـ و = و ب = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∵ د هـ // ب و ، ب د // و هـ

∴ الشكل د هـ و ب متوازي أضلاع ∴ د هـ = ب و = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

مثال: في الشكل المقابل :

أ ب حـ د متوازي أضلاع ، هـ ، و ، س ، ص منتصفات أضلاعه أ ب ، ب حـ ، حـ د ، د أ

برهن أن : هـ و س ص متوازي أضلاع

إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

البرهان :

في ▲ أ ب د :

∵ هـ ص مرسومة بين منتصفي أ ب ، أ د

∴ هـ ص // ب د ، هـ ص = $\frac{١}{٢}$ ب د ------ (١)

في ▲ ب حـ د :

∵ و س مرسومة بين منتصفي ب جـ ، د حـ

∴ و س // ب د ، و س = $\frac{١}{٢}$ ب د ------ (٢)

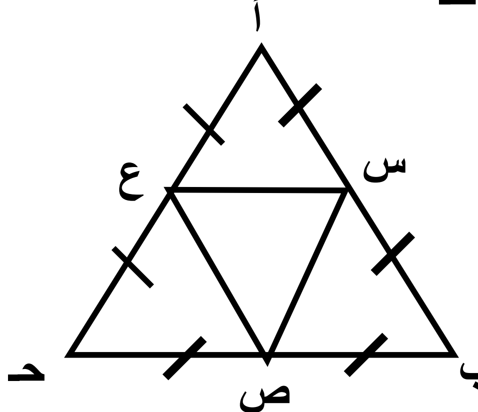
من (١) ، (٢) نجد أن :

∴ هـ ص // و س ، هـ ص = وس

∴ هـ و س ص متوازي أضلاع

مثال : إذا كانت س ، ص ، ع منتصفات أ ب ، ب حـ ، أ حـ في المثلث علي الترتيب . أثبت أن : محيط المثلث أ ب حـ = ٢ محيط المثلث س ص ع

الحل :



∵ س ص مرسومة بين منتصفي أ ب ، ب حـ

∴ س ص = $\frac{١}{٢}$ أ حـ (١)

∵ س ع مرسومة بين منتصفي أ ب ، أ حـ

∴ س ع = $\frac{١}{٢}$ ب حـ (٢)

∵ ص ع مرسومة بين منتصفي ب حـ ، أ حـ

∴ ص ع = $\frac{١}{٢}$ أ ب (٣)

بجمع ١ ، ٢ ، ٣ نجد أن :

س ص + س ع + ص ع = $\frac{١}{٢}$ أ حـ + $\frac{١}{٢}$ ب حـ + $\frac{١}{٢}$ أ ب

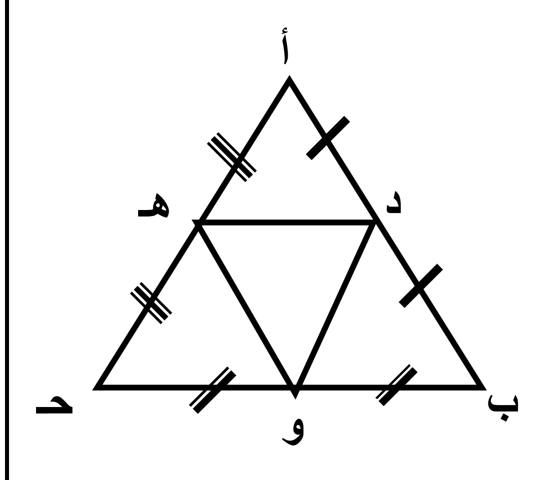
محيط المثلث س ص ع = $\frac{١}{٢}$ (أ حـ + ب حـ + أ ب) = $\frac{١}{٢}$ محيط △ أ ب حـ

∴ محيط المثلث أ ب حـ = ٢ محيط المثلث أ ب حـ

إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

مثال : أ ب حـ مثلث ، د ، هـ ، و منتصفات أ ب ، أ حـ ، ب حـ علي الترتيب
وكان د هـ = ٤ سم ، د و = ٢.٥سم ، هـ و = ٣ سم
أحسب محيط المثلث أ ب حـ .

الحل :



∵ د هـ مرسومة بين منتصفي أ ب ، أ حـ

∴ د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∴ ب حـ = ٢ د هـ = ٨ سم

∵ د و مرسومة بين منتصفي أ ب ، ب حـ

∴ د و = $\frac{١}{٢}$ أ حـ

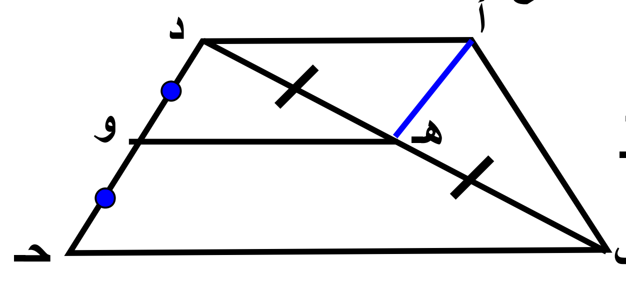
∴ أ حـ = ٢ د و = ٥ سم

∵ و هـ مرسومة بين منتصفي أ حـ ، ب حـ

∴ و هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب ∴ أ ب = ٢ و هـ = ٦ سم

∴ محيط المثلث = أ ب + ب حـ + حـ أ = ٦ + ٨ + ٥ = ١٩ سم

مثال : أ ب حـ د شبه منحرف فيه أ د // ب حـ ، ب حـ = ٢ أ د ، وصل د ب
و نصف في هـ ، نصفت د حـ في و ثم وصل أ هـ ، هـ و
أثبت أن : الشكل أ هـ و د متوازي الأضلاع



الحل : في المثلث د ب حـ :

∵ هـ و مرسومة بين منتصفي د ب ، د حـ

∴ هـ و // ب حـ ، هـ و = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∵ أ ب حـ د شبه منحرف

∵ أ د // ب حـ ، أ د // هـ و (١)

∴ ب حـ = ٢ أ د ، أ د = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∴ هـ و = أ د (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : أ هـ و د متوازي أضلاع

مثال: في الشكل المقابل :

أ ب حـ د متوازي أضلاع ، أ د = د هـ

رسم $\overleftarrow{\text{هـ حـ}}$ ليقطع $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ في و

أثبت أن : أولا : هـ حـ = حـ و

ثانيا : أ ب = ب و

البرهان :

∵ أ ب حـ د متوازي أضلاع

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د حـ}}$ ∴ $\overline{\text{د حـ}}$ // $\overline{\text{أ و}}$

∵ $\overline{\text{د حـ}}$ // $\overline{\text{أ و}}$ ، أ د = د هـ

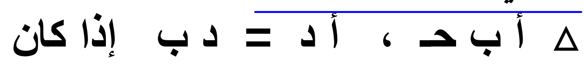
∴ هـ حـ = حـ و (أولا)

∵ $\overline{\text{ب حـ}}$ // $\overline{\text{أ د}}$ ∴ $\overline{\text{ب حـ}}$ // $\overline{\text{أ هـ}}$

∵ $\overline{\text{ب حـ}}$ // $\overline{\text{أ هـ}}$ ، هـ حـ = حـ و

∴ أ ب = ب و (ثانيا)

مثال : في الشكل المقابل :



∆ أ ب حـ ، أ د = د ب إذا كان

طول $\overline{\text{ب حـ}}$ = ٨ سم أوجد طول

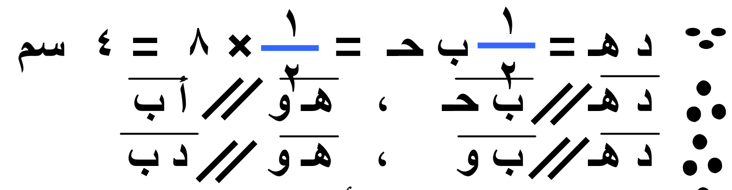
كل من $\overline{\text{ب و}}$ ، $\overline{\text{د هـ}}$

الحل :

∵ أ د = د ب ، $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ أ هـ = هـ حـ

∵ $\overline{\text{د هـ}}$ مرسومة بين منتصفي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$



∴ د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ سم

∴ $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب و}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{د ب}}$

∴ د ب و هـ متوازي أضلاع ∴ د هـ = ب و = ٤ سم

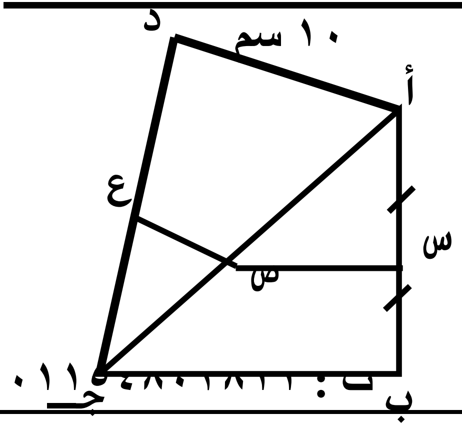


مثال : فى الشكل المقابل

إذا كانت س منتصف أ ب

، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ع منتصف $\overline{\text{ء جـ}}$

أثبت أن $\overline{\text{ص ع}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ ثم أوجد طول $\overline{\text{ص ع}}$



إعداد / خالد المنفلوطى

ت : ٠١١٥٤٨٠١٨١١

الحـــــــــــــــــل

A س منتصف أ ب ، س ص // ب جـ

\ ص منتصف أ جـ

A ص منتصف أ جـ ، ع منتصف ء جـ

\ ص ع // أ ء

A ص منتصف أ جـ ، ع منتصف ء جـ

B ص ع = ١/٢ أ ء

A أ ء = ١٠ سم \ ص ع = ٥ سم

مثال: فى الشكل المقابل س ، ص ، ع منتصفا أ ب ، ب جـ ، أ جـ

أ ب = ١٠ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أ جـ = ١٢ سم

أوجد محيط △ س ص ع

الحـــــــــــــــــل

A س منتصف أ ب ، ع منتصف أ جـ \ س ع = ١/٢ ب جـ

A ب جـ = ٨ سم \ س ع = ٤ سم

A س منتصف أ ب ،ص منتصف ب جـ \ س ص = ١/٢ أ جـ

A أ جـ = ١٢ سم \ س ص = ٦ سم

A ع منتصف أ جـ ، ص منتصف ب جـ \ ص ع = ١/٢ أ ب

A أ ب = ١٠ سم \ ص ع = ٥ سم

محيط △ س ص ع = ٤ + ٦ + ٥ = ١٥ سم



سؤال للتفكير

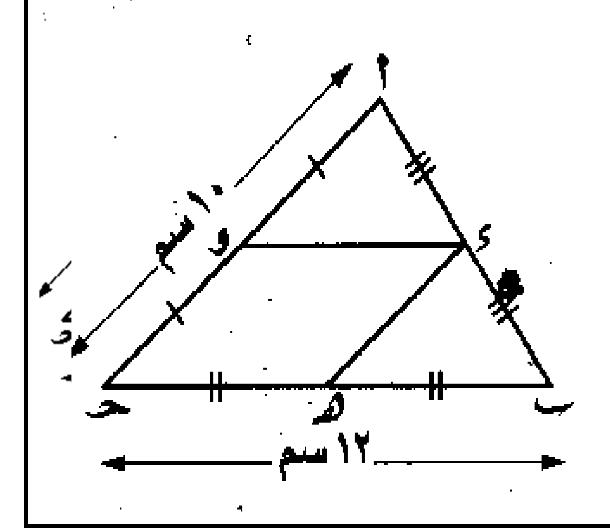
[١] فى الشكل المقابل:

أ ب حـ مثلث فيه : ى ، هـ ، و

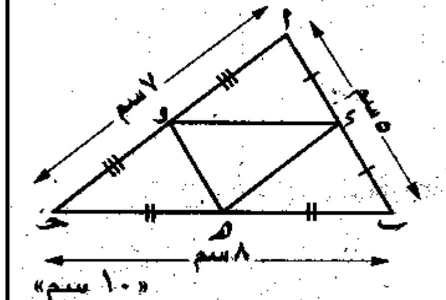
منتصفات أ ب ، ب حـ ، حـ أ على الترتيب

، ب حـ = ١٢ سم ، أ حـ = ١٠ سم

أوجد محيط الشكل ى هـ حـ و



[٢] في الشكل المقابل:

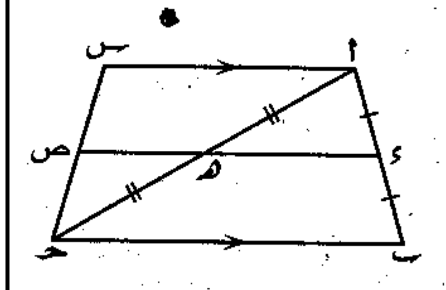


أب = ٥ سم ، ب حـ = ٨ سم ، حـ أ = ٧ سم

ء ، هـ ، و منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ على الترتيب

احسب محيط △ ء هـ و

[٣] في الشكل المقابل:

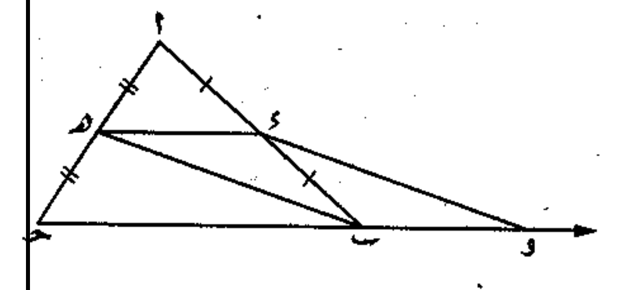


أء = ء ب ، أهـ = هـ حـ

، $\overline{أس}$ // $\overline{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ءهـ}$ ∩ $\overline{س حـ}$ = {ص}

أثبت أن: ص منتصف $\overline{س حـ}$

[٤] في الشكل المقابل:



ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب

، و ∈ $\overleftarrow{حـ ب}$ حيث ب و = $\frac{1}{2}$ ب حـ

أثبت أن: الشكل ب هـ ء و متوازى أضلاع.

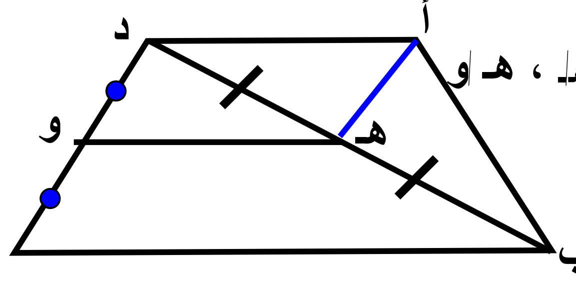
[٥] أ ب حـ د شبه منحرف فيه $\overline{أد}$ // $\overline{ب حـ}$



، ب حـ = ٢ أ د ، وصل $\overline{د ب}$

و نصفه في هـ ، نصفت $\overline{د حـ}$ في و ثم وصل $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{هـ و}$

أثبت أن : الشكل أ هـ و د متوازي الأضلاع



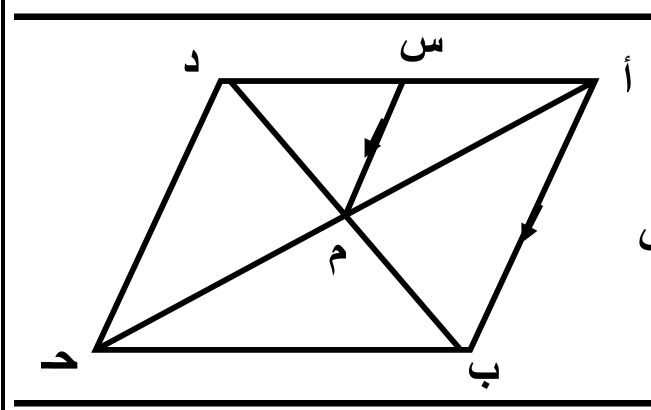
[٦] أ ب حـ مثلث فيه أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ أ = ٧ سم

فإذا كانت س ، ص ، ع منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ علي الترتيب

فأوجد محيط △ س ص ع

[٧] أ ب حـ د متوازي أضلاع ، هـ ∋ أ د بحيث أ د = د هـ رسم هـ حـ ليقطع أ ب في و أثبت أن : (١) هـ حـ = حـ و (٢) أ ب = ب و

[٨] في الشكل الموضح :
أ ب حـ د متوازي أضلاع حيث
أ حـ ∩ ب د = {م}
، رسم م س // ب أ و يقطع أ د في س
أثبت أن : س منتصف أ د



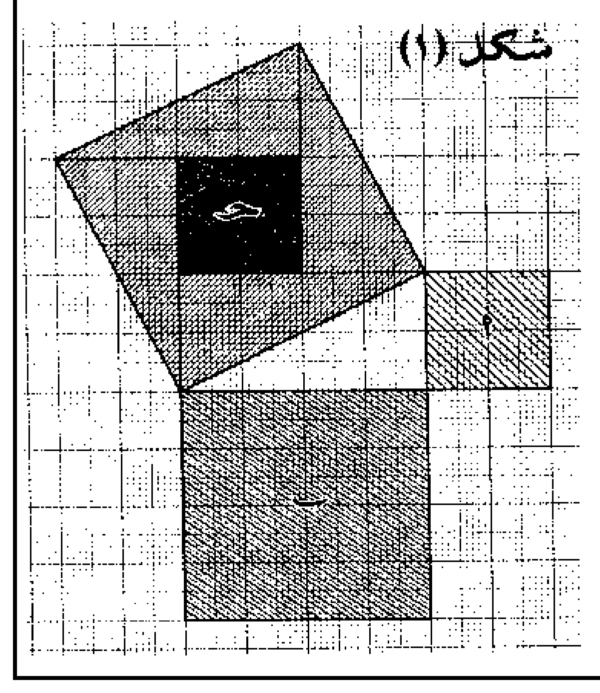
نظرية فيثاغورث

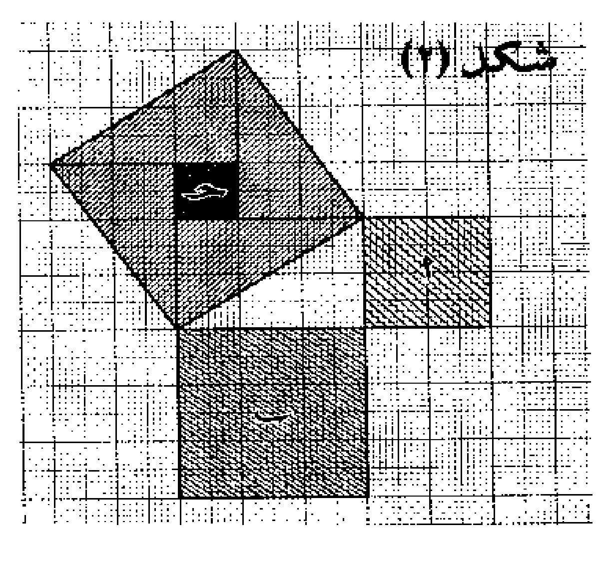
هل تعلم أن : الضلع المقابل للزاوية القائمة يُسمى أ حـ الوتر (أكبر أضلاع المثلث القائم) ، الضلعين الأخرين يُسميان أ ب ، ب حـ ضلعى القائمة .

الوتر

ضلعى القائمة

نشاط : فى كل من الاشكال الآتية: أوجد مساحة المربعين أ ، ب ، مساحة المربع حـ و تحقق من نظرية فيثاغورس .





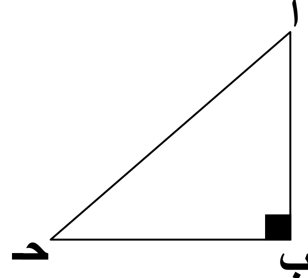
إعداد / خالد المنفلوطى

	أ	ب	حـ
الشكل ١	٤	١٦	٢٠
الشكل ٢	٤	٩	١٣

نلاحظ أن : مساحة الشكل حـ = مساحة الشكل أ + مساحة ب



فى المثلث القائم الزاوية مساحة المربع المنشأ على الوتر تساوى مجموع مساحتى المربعين المنشأين على ضلعى القائمة .



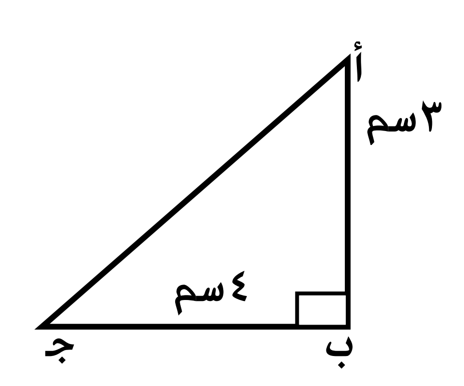
فى المثلث أ ب حـ :

إذا كان ق(ب̂) = ٩٠ ° فإن (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢} = (أ حـ)^{٢}

أو

فى المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر = مجموع مربعى طولى ضلعى القائمة

مثال : فى الشكل المقابل : أوجد (أ جـ)^{٢}



الحل :

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

= (٣)^{٢} + (٤)^{٢} = ٩ + ١٦

= ٢٥

مثال : فى الشكل المقابل : أوجد مساحة المربع المنشأ على $\overline{\text{ب حـ}}$

الحل

(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} - (أ ب)^{٢}

= (١٠)^{٢} - (٦)^{٢} = ١٠٠ - ٣٦

= ٦٤

مساحة المربع المنشأ على $\overline{\text{ب حـ}}$ = (ب جـ)^{٢} = ٦٤ سم^{٢}

مثال : فى الشكل المقابل :

س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص :

أكمـــــــل ما يأتى :

(١) إذا كان : س ص = ١٢ سم ، ص ع = ٩ سم

فإن : (س ع)^{٢} = ٠٠٠٠ سم^{٢}

، مساحة المربع المنشأ على الضلع $\overline{\text{س ع}}$ = ٠٠٠٠ سم^{٢}

(٢) إذا كان : س ص = ٥ سم ، ص ع = ١٣ سم

فإن : (س ع)^{٢} = ٠٠٠٠ سم^{٢}

، مساحة المربع المنشأ على الضلع $\overline{\text{س ع}}$ = ٠٠٠٠ سم^{٢}

مثال : ارسم مثلثاً قائم الزاوية أطوال أضلاع زاويته القائمة كالآتى : ٦ سم ، ٨ سم

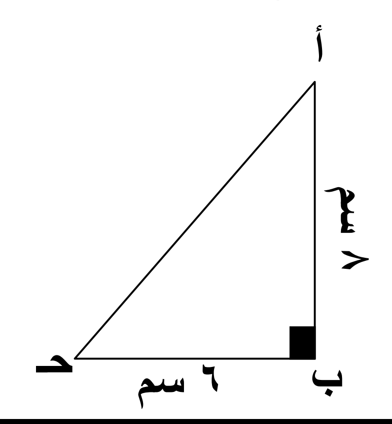
اكتب عبارة رياضية أو صياغة لفظية توضح علاقة الأضلاع الثلاثة .

الحل : العبارة الرياضية :

فى المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى ضلعى القائمة.

الصيغة الرياضية :

(أ حـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}





فى الشكل المقابل : فى المثلث أ ب حـ

إذا كان : (أ ب)^{٢} + (أ حـ)^{٢} = (ب حـ)^{٢}

فإن : ق($\hat{\text{أ}}$) = ٩٠ °



فى المثلث أ ب حـ إذا كان ب حـ أكبر الأضلاع طولا

و كان (ب حـ)^{٢} ≠ (أ ب)^{٢} + (أ حـ)^{٢} فإن : ق($\hat{\text{أ}}$) ≠ ٩٠ °

وبذلك لا يكون D أ ب حـ قائم الزاوية

مثال : بين فى كل مما يأتى ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا و حدد الزاوية القائمة إن وجدت :

[أ] فى D ف ل م ، ف ل = ٩ سم ، ل م = ١٥ سم ، ف م = ٢٠ سم

[ب] فى D أ ب حـ ، أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٥ سم ، أ حـ = ١٧ سم

الحل :

[أ] A ف م أكبر الأضلاع طولا .

، (ف م)^{٢} = ٤٠٠ ، (ف ل)^{٢} + (ل م)^{٢} = ٨١ + ٢٢٥ = ٣٠٦

B (ف ل)^{٢} + (ل م)^{٢} ≠ (ف م)^{٢}

B D ف ل م ليس مثلث قائم الزاوية .

[ب] A أ حـ أكبر الأضلاع طولا .

، (أ حـ)^{٢} = ٢٨٩ ، (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢} = ٦٤ + ٢٢٥ = ٢٨٩

B (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢} = (أ حـ)^{٢}

B D أ ب حـ مثلث قائم الزاوية .

تمارين على نظرية فيثاغورث

[١] ارسم مثلثاً قائم الزاوية طولا ضلعى زاويته القائمة كالآتى :

(١) ٣ سم ، ٤ سم (٢) ٩ سم ، ١٢ سم

اكتب عبارة رياضية أو صياغة لفظية توضح العلاقة بين الأضلاع الثلاثة .

[٢] بين فى كل مما يأتى ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا وحدد الزاوية القائمة إن وجدت :

(١) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٨ سم ، أ حـ = ٧ سم

(٢) ل م ن مثلث فيه : ل م = ٢٠ سم ، م ن = ٢١ سم ، ل ن = ٢٩ سم

[٣] أكمل ما يأتى :

(١) فى المثلث القائم الزاوية تكون مساحة المربع المنشأ على الوتر تساوى ٠٠٠٠

(٢) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب إذا كان : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٩ سم

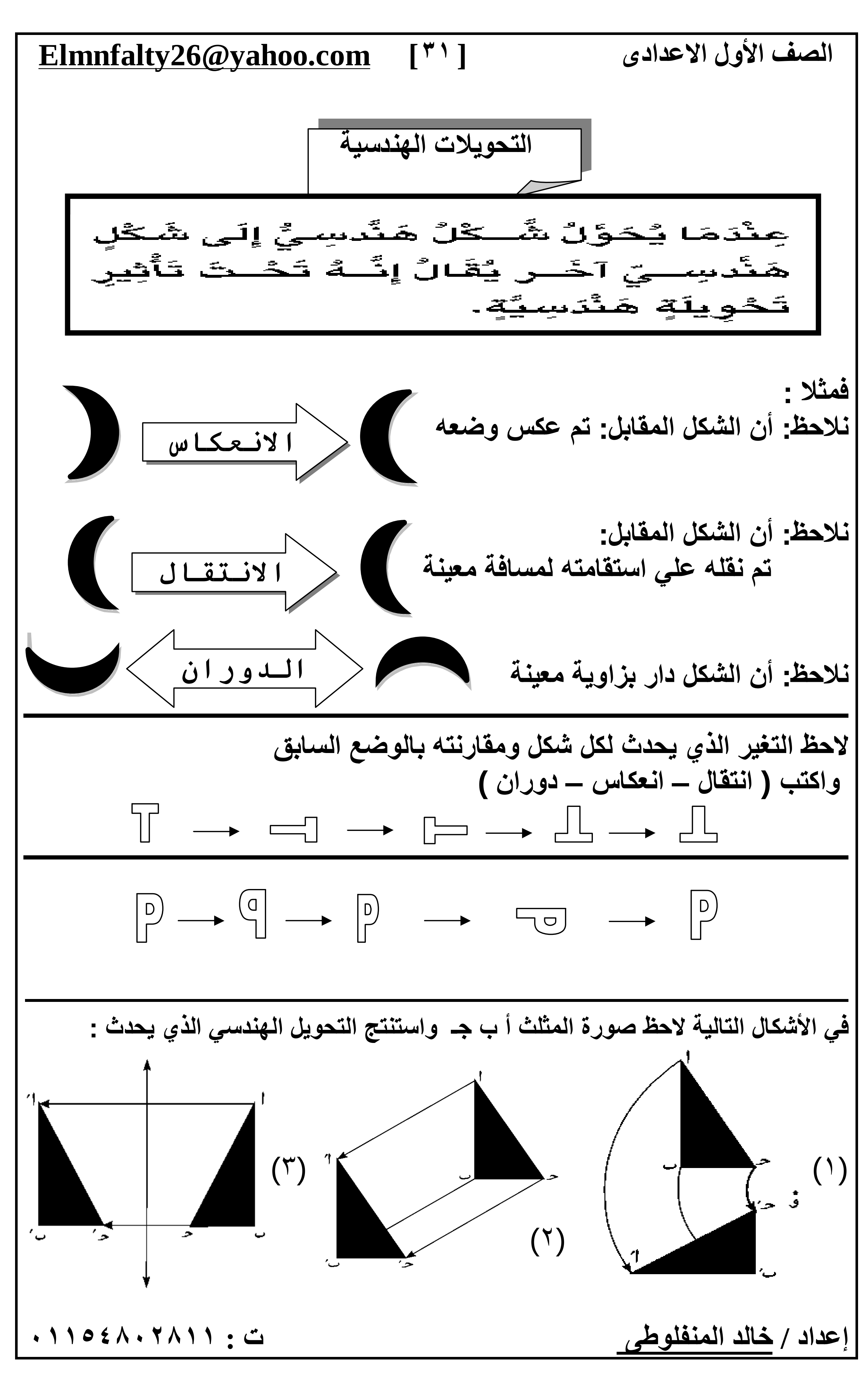
فإن : (أ حـ)^{٢} = ٠٠٠٠ سم^{٢}

، مساحة المربع المنشأ على الضلع أ حـ = ٠٠٠٠ سم^{٢}

(٣) س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص إذا كان : س ص = ٢٠سم

، ص ع = ٢٥ سم فإن : (س ع)^{٢} = ٠٠٠٠ سم^{٢}

، مساحة المربع المنشأ على الضلع س ع = ٠٠٠٠ سم^{٢}



التحويلات الهندسية

عِنْدَمَا يُحَوَّلُ شَكْلٌ هَنْدسِيٌ إلَى شَكْلٍ هَنْدسِيّ آخَر يُقَالُ إنَّهُ تَحْتَ تَأثِيرِ تَحْوِيلَةٍ هَنْدسِيَّةٍ.

فمثلا :

نلاحظ: أن الشكل المقابل: تم عكس وضعه

الانعكاس

نلاحظ: أن الشكل المقابل:
تم نقله علي استقامته لمسافة معينة

الانتقال

نلاحظ: أن الشكل دار بزاوية معينة

الدوران

لاحظ التغير الذي يحدث لكل شكل ومقارنته بالوضع السابق
واكتب (انتقال – انعكاس – دوران)

في الأشكال التالية لاحظ صورة المثلث أ ب جـ واستنتج التحويل الهندسي الذي يحدث :

(١) (٢) (٣)

إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

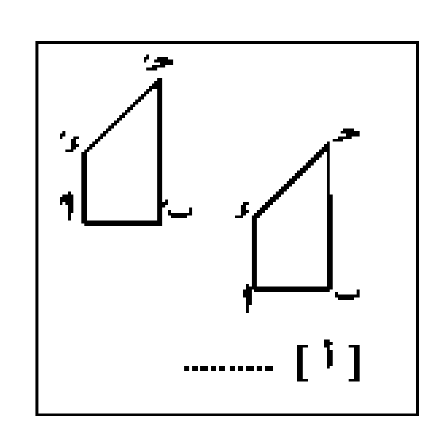
النقط م/ ، ب/ ، حـ/ هى صور النقط م ، ب ، حـ

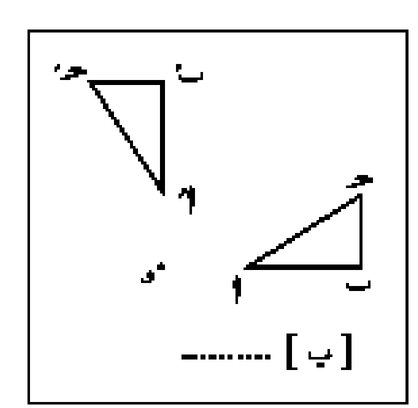
نلاحظ من الأشكال السابقة كل نقاط ∆ أ ب جـ تحولت إلي وضع أخر حيث ولذلك :
إذا تحركت كل نقاط أي شكل هندسي تبعا لنظام محدد فنحصل علي صورة أخري في وضع جديد لنفس الشكل الهندسي ونقول أن الشكل تحت تأثير تحويلة هندسية .
أي أن :

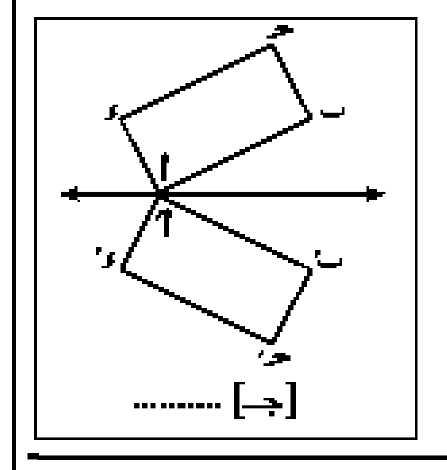
التَّحْوِيلَةُ الْهَنْدَسِيَّةُ تُحَوِّلُ كُلَّ نُقْطَةٍ ن فِي الْمُسْتَوَى إِلَي نُقْطَةٍ ن/ فِي الْمُسْتَوَي نَفْسِهِ .

تذكر أن التحويلات الهندسية : هى
الانعكاس ـــــــ الانتقال ـــــــ الدوران

١ صِفْ نَوْعَ التَّحْوِيلَةِ الْهَنْدَسِيَّةِ (انْعِكَاسٌ – انْتِقَالٌ – دَوَرَانٌ) فِي كُلِّ شَكْلٍ مِمَّا يَلِي :


[أ] ....

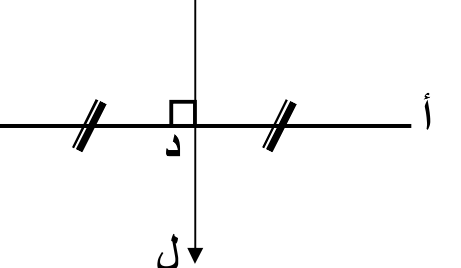

[ب] ....


[جـ] ....

الانـعكاس

الانعكاس في خط مستقيم في المستوى :

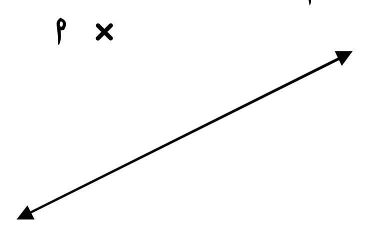
هو تحويل هندسي يحول كل نقطة أ مثلا واقعة في المستوى إلي نقطة أخرى أ/ في نفس المستوى. بحيث يكون ا لمستقيم ل عمودياً على أ أ/ من منتصفها



في ا لشكل ا لمقابل :
إذا كانت أ/ هي صورة أ بالانعكاس علي المستقيم ل

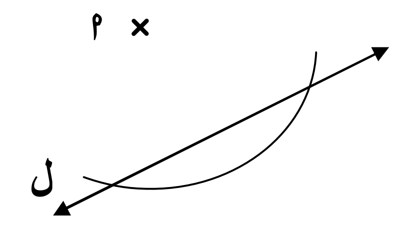
فإن ل ⊥ أ أ/ ، أ د = د أ/
و يلاحظ أن: نقطة د هي صورة د نفسها بالانعكاس علي ل (د ∋ ل)

مثال : ارسم ۴ / صورة النقطة ۴ بالانعكاس فى المستقيم ل .

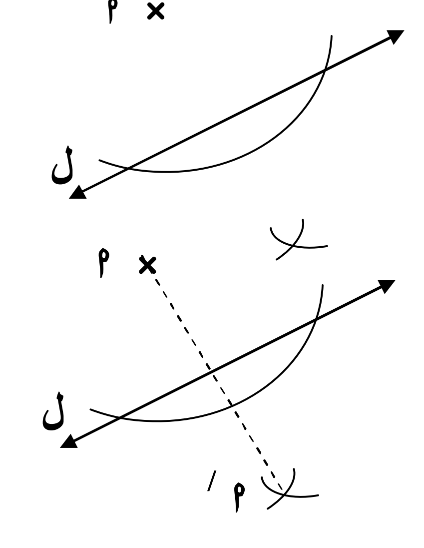


الحل :

١ - ارسم قوسا من دائرة مركزها ۴ يقطع ل فى ب ، جـ



٢ - أركز في ب ، جـ بنفس الفتحة ارسم قوسين يتقاطعان فى ۴ /



٣ - ۴ / هى صورة ۴ بالانعكاس فى ل

تحقق بالقياس أن : ل ⊥ ۴ ۴ / ، ل ينصف ۴ ۴ /

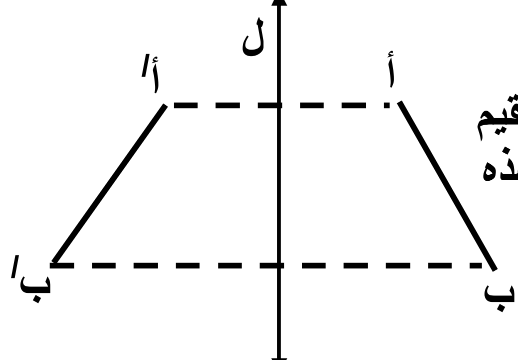
إيجاد صورة شكل بالانعكاس في مستقيم معلوم

[١] رسم صورة قطعة مستقيمة أ ب بالانعكاس في مستقيم ل :

لتحديد صورة قطعة مستقيمة بالانعكاس فى مستقيم يكفى تحديد صورة كل من طرفيها ثم نصل بين هذه الصور فنحصل على صورة القطعة المستقيمة .

ل
أ/ أ
ب/ ب

مثال : فى الشكل المقابل :
أوجد صورة ۴ ب بالانعكاس فى المستقيم ل



إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

الحل :

١- ٢-

٣-

م/ ب/ هى صورة م ب بالانعكاس فى ل

تحقق بالقياس أن ل هو العمود المنصف لكل

من م م/ ، ب ب/ ، أن م ب = م/ ب/

[٢] رسم صورة مضلع بالانعكاس في مستقيم ل :

نوجد صورة كل رأس من رؤوس الشكل بالانعكاس في المستقيم ل و نصل بين صور

الرؤوس ا لمناظرة لأضلاع ا لمضلع .

في ا لشكل ا لمقابل :

أ/ هي صورة أ بالانعكاس في ا لمستقيم ل

، ب/ هي صورة ب

، حـ/ هي صورة حـ

فيكون ا لشكل أ/ ب/ حـ/ هو صورة

ا لشكل أ ب حـ بالانعكاس في ل

مثال : فى الشكل المقابل :
أوجد صورة المثلث ؟ ب جـ بالانعكاس فى ل

الحل :
نوجد صور النقط ؟ ، ب ، جـ بالانعكاس فى ل

∆ ؟/ ب/ جـ/ هو صورة ∆ ؟ ب جـ
بالانعكاس فى ل

ملحوظة :
بمقارنة عناصر ∆ ؟/ ب/ جـ/ ، ∆ ؟ ب جـ
نجد أن الانعكاس يحافظ على :

١ ـ الأبعاد بين ا لنقط ٢ ـ قياسات ا لزوايا
٣ ـ التوازي ٤ ـ استقامة ا لنقط

[٣] انعكاس دائرة فى مستقيم :
و لايجاد صورة دائرة مركزها م بالانعكاس فى مستقيم معلوم :
يكفى بأن نوجد صورة مركز الدائرة م بالانعكاس فى المستقيم المعلوم و ليكن م/
ثم نرسم دائرة نصف قطرها يساوى نصف قطر الدائرة م ومركزها هو م/

أوجد صورة الدائرة م بالانعكاس فى ل

أوجد صورة الدائرة م بالانعكاس فى ل

(١) م × ل

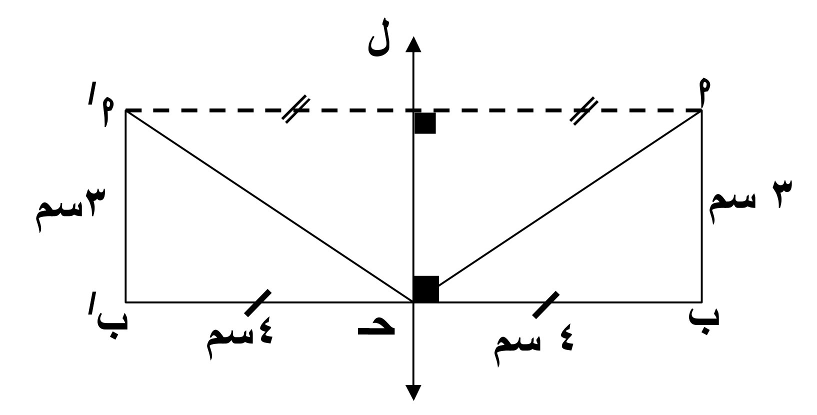
(٢) م × م/ ل

---

[١] ارسم ا لمثلث أ ب حـ ا لذي فيه أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ، ق(حـ أ ب حـ) = ٩٠ ° ثم أ وجد صورة △ أ ب حـ بالانعكاس في ا لمستقيم ل

ا لعمودي علي ب حـ في نقطة حـ وأوجد طول صورة ب حـ

الحل :



صورة △ أ ب حـ بالانعكاس في ا لمستقيم ل هي △ أ/ ب/ حـ/ ، ب/حـ = ٤ سم

الانعكاس في محوري الإحداثيات :

إذا كان س س/ هو المحور الافقى (محور السينات) ، ص ص/ هو المحور الرأسى

(محور الصادات) فى مستوى الاحداثيات و كانت النقطة و (٠ ، ٠) وكانت النقطة

(س ، ص) تقع فى المستوى فإن :

(١) الانعكاس في محور ا لسينات :

صورة ا لنقطة أ = (س ، ص)

بالانعكاس علي ا لمحور ا لسيني

هي ا لنقطة أ/ = (س ، ـ ص)

نـثـبـت ا لاحد ا ثـي الـسيـنـي ونـعـكس

ص
أ (س، ص)
س/
س
أ/ (س، ـ ص)
ص/

إشارة الاحداثي الصادي

(س ، ص) ⟵ (س ، - ص)

مثلا (٣ ، - ٥) ⟵ (٣ ، ٥)

(٢) الانعكاس في محور الصادات :

صورة النقطة أ = (س ، ص)

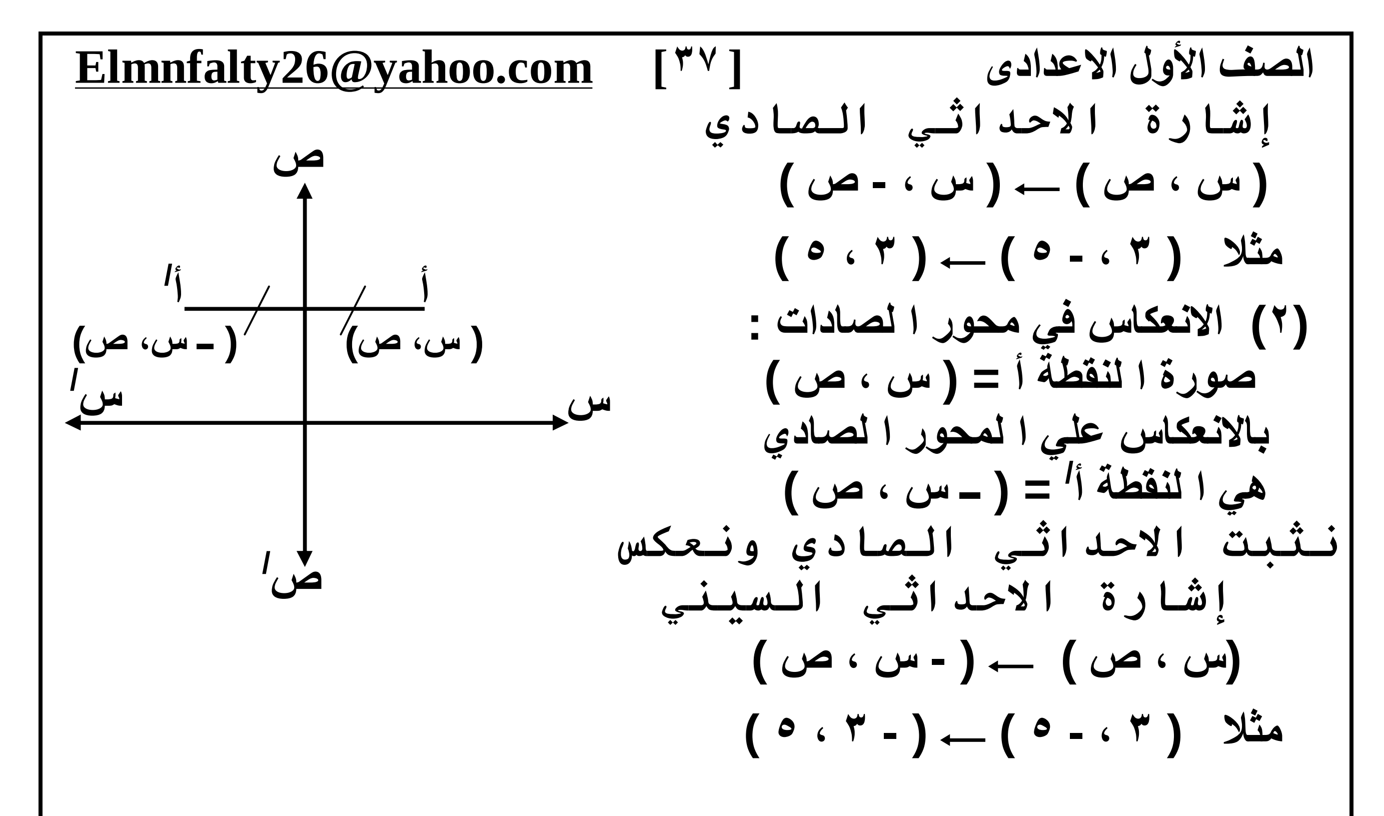
بالانعكاس علي المحور الصادي

هي النقطة أ/ = (ـ س ، ص)

نثبت الاحداثي الصادي ونعكس إشارة الاحداثي السيني

(س ، ص) ⟵ (- س ، ص)

مثلا (٣ ، - ٥) ⟵ (- ٣ ، ٥)



(٣) صورة النقطة أ = (س ، ص) بالانعكاس علي المحور السيني متبوعاً بالانعكاس علي المحور الصادي هي نفسها صورة النقطة أ = (س ، ص) بالانعكاس علي المحور الصادي متبوعاً بالانعكاس علي المحور السيني.

وتكون إحداثيات الصورة هي أ// = (ـ س ، ـ ص).

تذكر أن :

الانعكاس فى محورى الأحداثيات :-

صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس فى محور السينات هى (س ، - ص)

صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس فى محور الصادات هى (- س ، ص)

فمثلا

- صورة النقطة (٢ ، ٣) بالانعكاس فى محور السينات هى (٢ ، -٣)
- صورة النقطة (٢ ، ٣) بالانعكاس فى محور الصادات هى (-٢ ، ٣)

الانعكاس فى نقطة الاصل :-

صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس فى نقطة الاصل هى (- س ، - ص)

فمثلاً

صورة النقطة (٣ ، ٤) بالانعكاس فى نقطة الاصل هى (-٣ ، -٤)

ملاحظة هامة :-

إذا كانت أ تقع علي المستقيم ل فإن صورتها بالاتعكاس فى ل هى نفسها أ
فمثلا النقطة (س ، ٠) تقع على محور السينات فتكون صورتها بالانعكاس فى محور السينات هى نفسها
فمثلا صورة النقطة (٣ ، ٠) بالانعكاس فى محور السينات هى (٣ ، ٠)
- النقطة (٠ ، ص) تقع على محور الصادات ولهذا فإن صورتها بالانعكاس فى محور الصادات هى نفسها
فمثلا صورة النقطة (٠ ، ٣) بالانعكاس فى محور الصادات هى (٠ ، ٣)

أكمل ما ياتى :

١- صورة النقطة (٣ ، ٧) بالانعكاس فى محور السينات هى .....
٢- صورة النقطة (٠ ، ٢) بالانعكاس فى محور الصادات هى .....
٣- صورة النقطة (... ، ..) بالانعكاس فى محور السينات هى (٥ ، - ١)
٤- النقطة (- ٧ ، ١) هى صورة النقطة (٧ ، ١) بالانعكاس فى محور ....
٥- النقطة (.. ، ..) هى النقطة (-٦ ، ٤) بالانعكاس فى ص ص/

اختر الإجابة الصحيحة :

(١) صورة النقطة (- ٣ ، ٢) بالانعكاس فى محور السينات هى .....
[(٣ ، ٢) ، (٣ ، - ٢) ، (- ٣ ، - ٢) ، (- ٣ ، ٢)]
(٢) صورة النقطة (- ٤ ، ٦) بالانعكاس فى محور الصادات هى .....
[(٤ ، ٦) ، (- ٤ ، - ٦) ، (٤ ، - ٦) ، (- ٤ ، ٦)]
(٣) صورة النقطة (٨ ، ٢) بالانعكاس فى محور الصادات متبوعا بالانعكاس فى محور السينات هى .....
[(٨ ، ــ ٢) ، (- ٨ ، ٢) ، (- ٨ ، - ٢) ، (٨ ، ٢)]

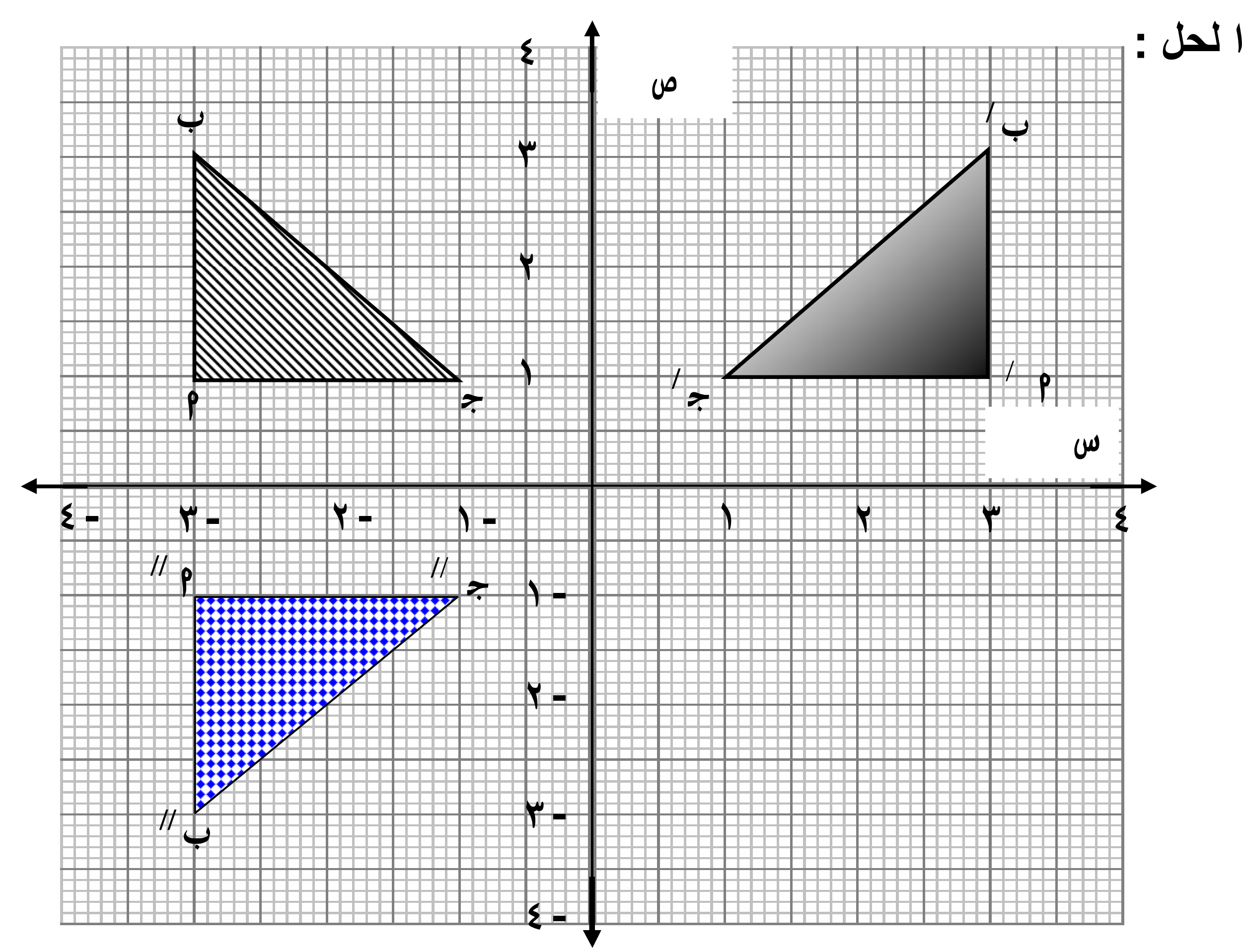
مثال : عين فى المستوى الاحداثي المتعامد المثلث م ب ج حيث
م(- ٣ ، ١)، ب(- ٣ ، ٣) ، ج (- ١ ، ١) ثم أ وجد صورته بالانعكاس
أولا : في محور ا لسينات ثانياً : في محور ا لصادات

الحل :

إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١



ا لحل :



Δ م/ ب/ جـ/ هو صورة Δ م ب جـ بالانعكاس في محور الصادات.

Δ م// ب// جـ// هو صورة Δ م ب جـ بالانعكاس في محور السينات.

سؤال للتفكير

(١) أكتب إحداثيات صور ا لنقط الآتية :

أ (ــ ٥ ، ١) ، ب (٠ ، ــ ٦) ، حـ (٣ ، ٢) ، د (ــ ٢ ، ــ ٣)

بالانعكاس في :

أولا : محور ا لسينات ثانيا : محور ا لصادات

(٢) ارسم Δ أ ب حـ حيث أ (٢ ، ــ ٢) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (ــ ٣ ، ٢)

ثم ارسم صورته Δ أ/ ب/ حـ/ بالانعكاس في محور ا لصادات .

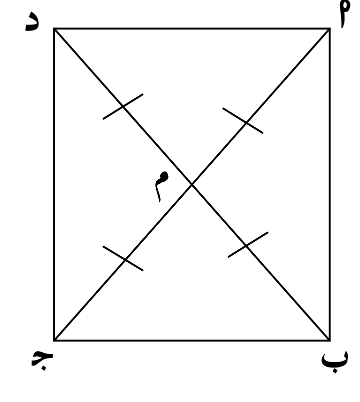
ثم ارسم صورة Δ أ// ب// حـ// بالانعكاس في محور ا لسينات .

(٣) ارسم صورة المثلث س ص ع الذي أطوال أضلاعه س ص = ٣ سم ، ص ع = ٥ سم ، ع س = ٧ سم بالانعكاس فى المستقيم الذي يحتوى الضلع الاكبر طولا .

(٤) ارسم صورة المثلث س ص ع الذي أطوال أضلاعه س ص = ٣ سم ، ص ع = ٤ سم ، ع س = ٥ سم بالانعكاس فى المستقيم الذي يحتوى الضلع الأصغر طولا .

(٥) فى الشكل المقابل : ٢ ب ﺟ د مربع تقاطع قطراه فى م

أكمل ما يأتي :



١- صورة المثلث ٢ ب ﺟ بالانعكاس فى ٢ ﺟ هى . . . .

٢- صورة المربع ٢ ب ﺟ د بالانعكاس فى ٢ ﺟ هى . . . .

٣- صورة المثلث ٢ ب م بالانعكاس فى ٢ ﺟ هى . . . .

٤- △ ب ﺟ م صورة △ د ﺟ م بالانعكاس فى . . . . .

٥- △ ٢ ب د صورة △ ﺟ ب د بالانعكاس فى . . . . .



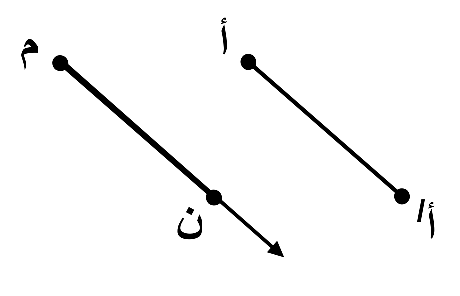
٦- صورة النقطة ٢ بالانعكاس فى ب د هى . . . . .

الانتقال في ا لمستوى

الانتقال : هو تحويل هندسي يحول كل نقطة (أ) مثلا واقعة في ا لمستوي إ لي نقطة أخرى وحيدة (أ/) في نفس ا لمستوى بحيث يكون :

[١] أ أ/ موازيا لاتجاه ثابت (معلوم)

[٢] أ أ/ = مقدار ثابت (معلوم)



تعريف آخر للانتقال :

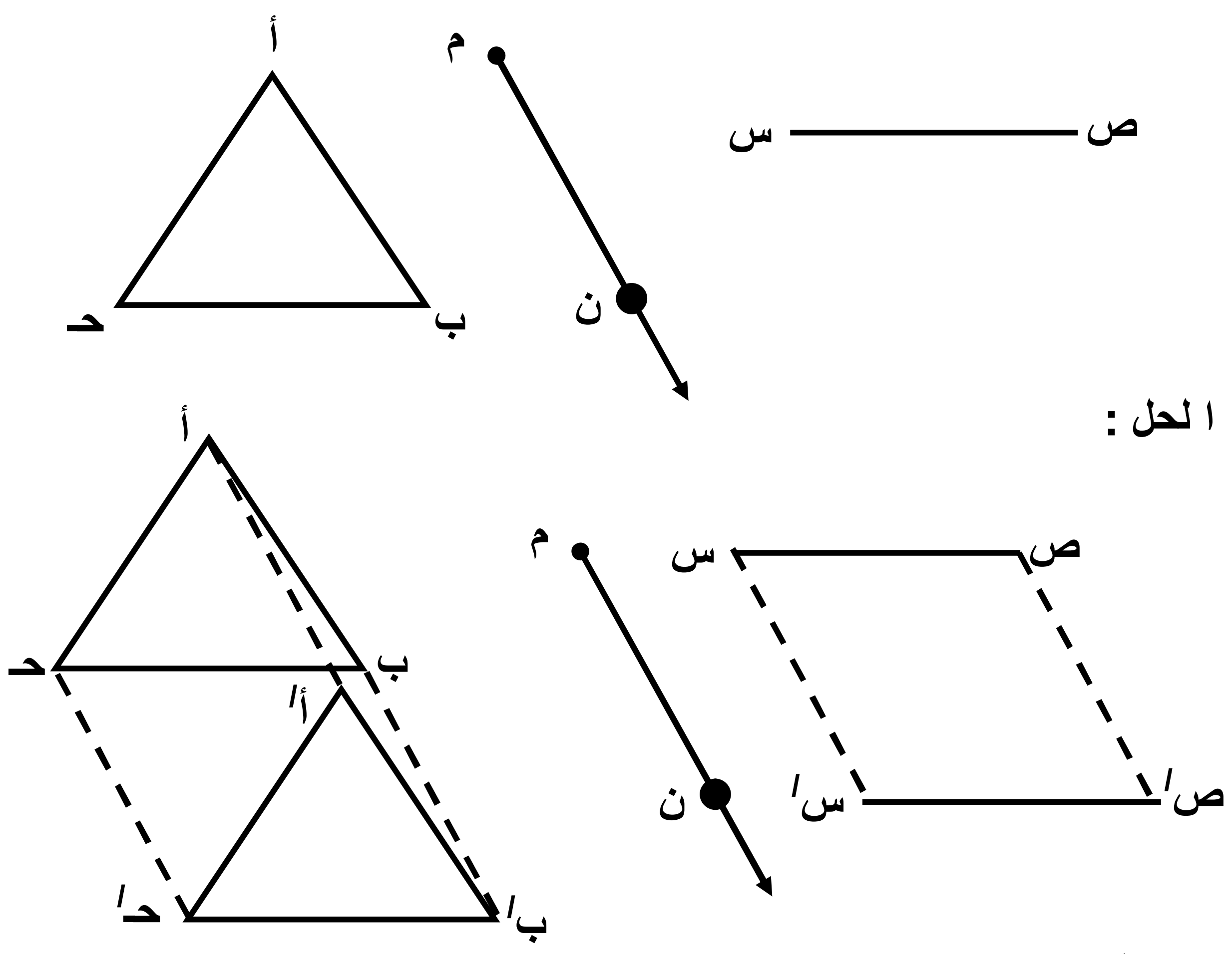
الانتقال م ن هو تحويل يزيح كل نقطة أ في ا لمستوى إ لي نقطة ا/ بحيث :

أ أ/ = م ن ، أ أ/ // م ن وفي نفس اتجاهه

ملحوظة : الانتقال م ن مسافته = م ن و ا تجاهه هو اتجاه م ن

إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

مثال : باستخدام الأدوات ا لهندسية أوجد صورة كل من $\overline{\text{س ص}}$ ومثلث أ ب حـ بانتقال م ن



ملاحظات :

(١) صورة مستقيم بالانتقال في ا تجاه ما هي مستقيم يوازيه.

(٢) صورة شعاع بالانتقال في ا تجاه ما هي شعاع يوازيه و في نفس اتجاهه.

(٣) صورة قطعة مستقيمة بالانتقال في ا تجاه ما هي قطعة مستقيمة .

(٤) صورة أي شكل بالانعكاس علي مستقيم أو بالانتقال في اتجاه ما تتطابق مع الشكل نفسه .

إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

الانتقال في مستوى ا لإحداثيات

تذكر أن : (١) الانتقال فى مستوى الإحداثيات يكون
* فى اتجاه المحاور
** و حسب مسافة الانتقال .

(٢) الانتقال (٤ ، - ٣) يعنى : انتقال مسافة ٤ وحدات فى إتجاه محور السينات الموجب ثم متبوعا بانتقال مسافة ٣ وحدات فى اتجاه محور الصادات السالب.

(٣) صورة (س ، ص) ←بانتقال (م ، ن)← (س + م ، ص + ن)

(٤) إذا كانت : ؟ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإن :
و يكون : الانتقال ؟ ب = ب – ؟ = ($س_٢$ - $س_١$ ، $ص_٢$ - $ص_١$)

مثلا: صورة ؟ (٤،١) بالانتقال (٢، ـ ١)هي ؟/(٤ـ٢،١- ١) أي ؟/(٢ ، صفر)

تذكر أن :
صورة النقطة (س ، ص) بالانتقال (م ، ن) = (س + م ، ص + ن)

الصورة = النقطة + الانتقال
النقطة = الصورة ـ الانتقال
الانتقال = الصورة ـ النقطة

مثال : إذا كانت ؟ = (٥ ، ـ ٢) ، ب = (ـ ٤ ، ٤) أوجد الانتقال ؟ ب
الحل: الانتقال ؟ ب = الانتقال (ـ ٤ ـ ٥ ، ٤ + ٢) = الانتقال (ـ ٩ ، ٦)

مثال : بأستخدام الأنتقال الذى يحول النقطة (س ، ص) إلى (س+١،ص-٢) أوجد
(١) صورة النقطة (٣ ، ٤)   (٢) النقطة التى صورتها (٣ ، ٤)

الحـــــــــــــل

الأنتقال = (١ ، -٢)
الصورة = النقطة + الأنتقال = (٣ ، ٤) + (١ ، -٢) = (٤ ، ٢)
النقطة = الصورة ـ الأنتقال = (٣ ، ٤) ـ (١ ، -٢) = (٢ ، ٦)

مثال : إذا كانت أ = (-١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٥) أوجد صورة النقطة (٢ ، ٥) بالانتقال الذى مقدار $\overline{\text{أ ب}}$ وفى أتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

الحـــــــــــــل

الانتقال = ب ـ أ = (٣ ، ٥) ـ (-١ ، ٢) = (٤ ، ٣)
صورة النقطة (٢ ، ٥) = (٢ ، ٥) + (٤ ، ٣) = (٦ ، ٨)

مثال: إذا كانت أ = (١ ، ٢) ، أ/ هي صورة أ بالانتقال (ـ ٣ ، ١) ، أ// هي صورة أ/ بالانتقال (٢ ، ٢) ماهو الانتقال الذي يجعل أ// هي صورة أ ؟ ماذا تلاحظ ؟

ا لحل :

أ (١،٢) ⟵ بالانتقال (ـ١،٣) ⟵ أ/ (ـ٢،٣)

أ/(ـ٢،٣) ⟵ بالانتقال (٢،٢) ⟵ أ// (٠ ، ٥)

الانتقال (ـ ٣، ١) متبوعاً بالانتقال (٢ ، ٢)
يكافئ الانتقال (-١ ، ٣)

ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

إعداد / خالد المنفلوطي

قاعدة (١) :

الانتقال (ك١، ل١) متبوعاً بانتقال (ك٢ ، ل٢) يكافئ الانتقال (ك١+ ك٢ ، ل١+ ل٢)

مثال: إذا كانت أ = (ـ ٣ ، ١) ، ب = (٣ ، ـ ١) فأوجد الانتقال الذي يجعل ب صورة أ وكذلك الانتقال الذي يجعل أ هي صورة ب .

ا لحل :

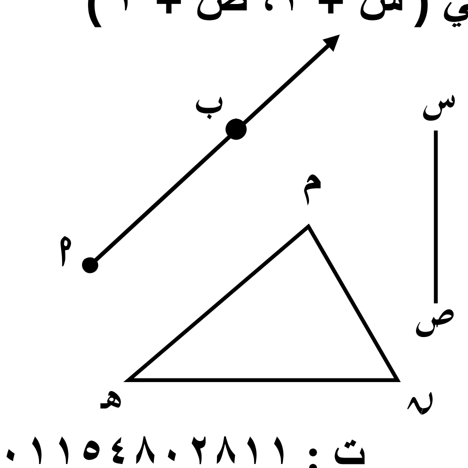
الانتقال الذي يجعل ب صورة أ = الانتقال (٣ ـ (ـ ٣) ، ـ ١ ـ ١)
أي الانتقال (٦ ، ـ ٢)
الانتقال ا لذي يجعل أ صورة ب = الانتقال (ـ ٣ ـ ٣ ، ١ + ١)
أي الانتقال (ـ ٦ ، ٢)

قاعدة (٢) :
إذا كانت ب هي صورة أ بالانتقال (ك ، ل) فإن الانتقال الذي يجعل أ هي صورة ب هو الانتقال (ـ ك ، ـ ل) .

سؤال للتفكير

١ـ علي شبكة تربيعية ارسم القطعة ا لمستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٢ ، ٣) ، ب (٢ ، ٥) ثم أوجد صورتها بالانعكاس في محور الصادات متبوعاً بالانتقال (١، ـ ٥)

٢ـ بتطبيق الانتقال الذي يحول النقطة (س، ص) إلي (س + ٢، ص + ٣)
١ـ أ وجد صورة النقطة (١ ، ٤)
٢ ـ أ وجد صورة النقطة (ـ ٣، ٥)
٣ـ أ وجد ا لنقطة التي صورتها (٢ ، ٣)
٣ـبالانتقال $\overrightarrow{\text{م ب}}$ أوجد صورة كل مما يأتي :
١ـ $\overline{\text{س ص}}$
٢ـ △ م ن هـ



إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

(٤) أكمل ما يأتى :

١- لتحديد الانتقال يلزم معرفة .... ، ....

٢- النقطة (٢ ، ٥) هي صورة ا لنقطة (٣ ، ـ ٢) بالانتقال ......

٣- صورة ا لنقطة (٤ ، ـ ٥) بالانتقال (ـ ٢ ، ٣) هي .....

٤- ا لنقطة (ـ ٥ ، ٦) هي صورة ا لنقطة .... بالانتقال (٢ ، ٣)

٥- صورة ا لنقطة (٥ ، ـ ٤) بانتقال مقداره أربع وحدات في اتجاه الموجب لمحور الصادات هي .....

[٥] ارسم ا لمثلث أ ب حـ ا لقائم ا لزاوية في ب فيه أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٤ سم ، حـ أ = ١٠ سم ثم أوجد صورة هذا المثلث بانتقال مسافة ٥ سم في اتجاه $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$

[٦] إذا كانت صورة ا لنقطة (٣ ، ٢) هي (٩ ، ٤) بالانتقال مسافة أ ب في اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ = (٢ ، ـ ٣) أ وجد ب

[٧] ارسم على الشبكة التربيعية △ ٩ب ج حيث ا (- ٣ ، ٢) ، ب (- ١ ، ١) ، ج (- ٢ ، ٠) ثم أوجد صورته بالانتقال (س ، ص) ⟵ (س+٢، ص+١)

[٨] أوجد صورة كل من النقط الآتية بالانتقال مسافة أ ب فى الاتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ (٣ ، ٤) ، ب (٧ ، ٢)

(١) حـ (٣ ، - ٢) (٢) ب (- ١ ، ٣) (٣) هـ (٠ ، ٢)

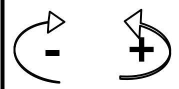
[٩] النقطة أ/ (٣ ، - ٣) هى صورة النقطة أ بانتقال قاعدته (س ، ص) ⟵ (س– ١ ، ص – ٤)

ارسم النقطة أ و صورتها أ/ على الشبكة التربيعية و بنفس الانتقال أوجد صورة المثلث أ ب حـ حيث ب (٥ ، ٠) ، حـ (- ١ ، - ٢)

[١٠] إذا كانت صورة النقطة أ (١ ، ١) بالانتقال فى المستوى هى أ/ (٢ ، ٢) أوجد صورة النقط التالية بنفس الانتقال : و (٠ ، ٠) ، ب (- ١ ، ٣) ، حـ (- ٣ ، ٥)

نقطة + انتقال = صورة ، النقطة = صورة – انتقال ، الانتقال = صورة – نقطة

الدوران



الدوران :

هو تحويلة تدور الشكل الهندسي حول نقطة ثابتة بزاوية معينة فى اتجاه معين

أو هو تحويلة هندسية تحول الشكل الهندسي الى شكل هندسى آخر مطابق له .

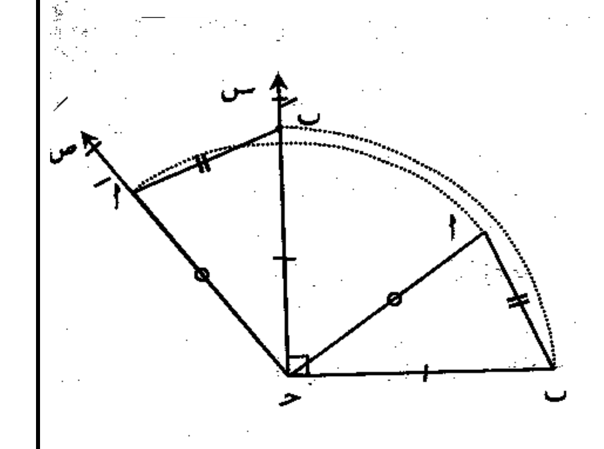
أى أن : الدوران الذى مركره م و قياس زاويته هـ يحول النقطة م إلى نفسها و يحول أى نقطة أخرى ﺃ فى المستوى إلى نقطة ﺃ / فى نفس المستوى بحيث :

(١) م ﺃ = م ﺃ /   (٢) ق (∠ ﺃ م ﺃ /) = هـ

ملاحظات :

١- **الدوران يكون موجبا إذا كان عكس عقارب الساعة .**
٢- **الدوران يكون سالبا إذا كان مع حركة عقارب الساعة .**
٣- **الدوران بزاوية قياسها ١٨٠ ، - ١٨٠ يسمى دوران نصف دورة .**
٤- **الدوران بزاوية قياسها ٣٦٠ ، - ٣٦٠ يسمى بالدوران المحايد (لأنه يعيد الشكل إلى وضعه الأصلى .**

*** مثـــال** **فى الشكل المقابل : ا ب حـ مثلث**



ارسم صورة Δ ا ب حـ بالدوران حول حـ بزاوية قياسها ٩٠°

∵ زاوية الدوران موجبة

∴ الدوران عكس حركة عقارب الساعة

(١) نرسم $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ بحيث ق (ب حـ^ س) = ٩٠°

ثم نأخذ ب / ∈ $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ بحيث ب حـ = ب / حـ

(٢) نرسم $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$ بحيث (ا حـ^ ص) = ٩٠° ثم نأخذ ا / ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$

بحيث ا حـ = ا / حـ ثم نصل $\overline{\text{ب / ا /}}$

فيكون Δ ا / ب / حـ هو صورة Δ ا ب حـ بالدوران حول حـ بزاوية قياسها ٩٠°

مـثـا ل : في الشكل المقابل:

إذا كان : أ ب حـ ء هـ و سداسيًا منتظمًا مركزه م فأكمل ما يأتي:

(١) صورة النقطة أ بدوران حول م بزاوية قياسها ١٨٠°

هي ....

(٢) صورة $\overline{\text{ب أ}}$ بدوران حول م بزاوية قياسها (-٦٠°)

هي ....

(٣) صورة Δ حـ م ء بدوران حول م بزاوية قياسها ١٢٠°

هو ....

تذكر أن:

قياس الزاوية الداخلة للسداسي المنتظم = ١٢٠°

(١) ء (٢) $\overline{\text{حـ ب}}$ (٣) Δ أ م ب

الدوران

الدوران هو تحويلة هندسية تتحدد بـ

(١) مركز الدوران (٢) قياس زاوية الدوران (٣) اتجاه الدوران

تذكر أن :

صورة النقطة (س ، ص)

- بالدوران حول نقطة الاصل بزاوية قياسها ٩٠° ← (- ص ، س)
- بالدوران حول نقطة الاصل بزاوية قياسها ١٨٠° ← (- س ، - ص)
- بالدوران حول نقطة الاصل بزاوية قياسها ٢٧٠° ← (ص ، - س)
- بالدوران حول نقطة الاصل بزاوية قياسها ٣٦٠° ← (س ، ص)

الدوران بزاوية قياسها (- ٩٠°) يكافئ دوران بزاوية ٢٧٠°

الدوران بزاوية قياسها (- ١٨٠°) يكافئ دوران بزاوية قياسها ١٨٠°

الدوران بزاوية قياسها (- ٢٧٠°) يكافئ دوران بزاوية قياسها ٩٠°

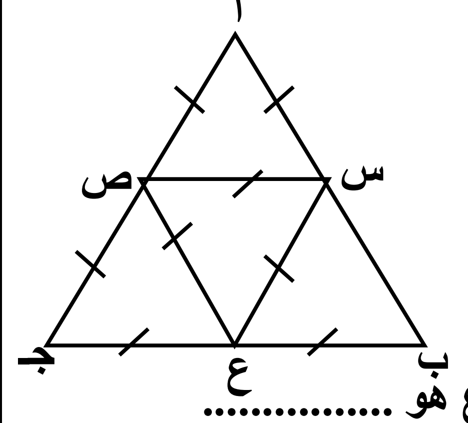
الدوران بزاوية ١٨٠° يسمى دوران نصف دورة

الدوران بزاوية ٣٦٠° يسمى دوران دورة كاملة ويسمى أيضاً الدوران المحايد

الدوران يحافظ على :

(١) البعد بين النقط (٢) قياسات الزوايا (٣) التوازى
(٤) البينية (٥) أستقامة النقط
(٦) الاتجاه الدورانى لترتيب رؤوس الشكل

النقطة	بالدوران ٩٠	بالدوران ١٨٠	بالدوران ٢٧٠	بالدوران ٣٦٠
(٢ ، ٣)	....	....	....	....
....	(٣ ، ٤)	....	....	....
....	....	(٥ ، ٢)	....	....
....	....	....	(٤ ، ٦)	....
....	....	....	....	(٥ ، ٧)
(-٢ ، ٥)	....	....	....	....
....	(-٣ ، ٤)	....	....	....



مثال : فى الشكل المقابل
أكمل

(١) صورة △ أ س ص بالانتقال أ س
وفى أتجاه أ س هو ....
(٢) صورة △ أ س ص بالانتقال أ ص
وفى أتجاه أ ص هو ....
(٣) صورة △ س ب ع بالانتقال ب ع وفى أتجاه ب ع هو ....
(٤) صورة △ ص ع جـ بالانتقال جـ ع وفى أتجاه جـ ع هو ....
(٥) صورة △ س ب ع بالانتقال ب س وفى أتجاه ب س هو ....
(٦) صورة △ ص ع جـ بالانتقال جـ ص وفى أتجاه جـ ص هو ....
(٧) صورة △ أ س ص بالدوران حول س بزاوية قياسها ٦٠ ° هو ....
(٨) صورة △ أ س ص بالدوران حول س بزاوية قياسها ١٢٠ ° هو ....
(٩) صورة △ أ س ص بالدوران حول ص بزاوية قياسها -٦٠ ° هو ....
(١٠) صورة △ أ س ص بالدوران حول س بزاوية قياسها - ١٢٠ ° هو ....
(١١) صورة △ س ب ع بالدوران حول س بزاوية قياسها ٩٠ ° هو ....
(١٢) صورة △ س ب ع بالدوران حول س بزاوية قياسها ١٢٠ ° هو ....

مثال : إذا كانت أ = (٥ ، ٤) ، ب = (٤ ، ١) ، جـ = (١ ، ١) أوجد

(١) صورة △ أ ب جـ بالدوران حول و بزاوية ٩٠ ْ

الحـــــــــــل

صورة أ بالدوران حول و بزاوية ٩٠ هى أ/ = (....... ، ......)

صورة ب بالدوران حول و بزاوية ٩٠هى ب / = (....... ، ......)

صورة جـ بالدوران حول و بزاوية ٩٠هى جـ / = (....... ، ......)

---

(٢) صورة △ أ ب جـ بالدوران حول و بزاوية ١٨٠

صورة أ بالدوران حول و بزاوية ١٨٠ هى أ// = (....... ، ......)

صورة ب بالدوران حول و بزاوية ١٨٠هى ب // = (....... ، ......)

صورة جـ بالدوران حول و بزاوية ١٨٠هى جـ // = (....... ، ......)

---

(٣) صورة △ أ ب جـ بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠

صورة أ بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠ هى أ/ = (....... ، ......)

صورة ب بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠هى ب / = (....... ، ......)

صورة جـ بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠هى جـ / = (....... ، ......)

مثال: إذا كانت أ = (٥ ، ٤) ، ب = (٥ ، ٢) ، جـ = (١ ، ٢) أوجد

(١) صورة △ أ ب جـ بالدوران حول و بزاوية ٩٠ ْ

الحـــــــــــل

صورة أ بالدوران حول و بزاوية ٩٠ هى أ/ = (....... ، ......)

صورة ب بالدوران حول و بزاوية ٩٠هى ب / = (....... ، ......)

صورة جـ بالدوران حول و بزاوية ٩٠هى جـ / = (....... ، ......)

(٢) صورة △ أ ب جـ بالدوران حول و بزاوية ١٨٠
صورة أ بالدوران حول و بزاوية ١٨٠ هى أ// = (....... ، ......)
صورة ب بالدوران حول و بزاوية ١٨٠هى ب // = (....... ، ......)
صورة جـ بالدوران حول و بزاوية ١٨٠هى جـ // = (....... ، ......)

---

(٣) صورة △ أ ب جـ بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠
صورة أ بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠ هى أ/ = (....... ، ......)
صورة ب بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠هى ب / = (....... ، ......)
صورة جـ بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠هى جـ / = (....... ، ......)

مثال : إذا كانت أ = (٦، ٤) ، ب = (٤ ، ١) ، جـ = (١ ، ٠) أوجد
(١) صورة △ أ ب جـ بالدوران حول و بزاوية ٩٠°
الحـــــــــــــل

صورة أ بالدوران حول و بزاوية ٩٠ هى أ/ = (....... ، ......)
صورة ب بالدوران حول و بزاوية ٩٠هى ب / = (....... ، ......)
صورة جـ بالدوران حول و بزاوية ٩٠هى جـ / = (....... ، ......)

---

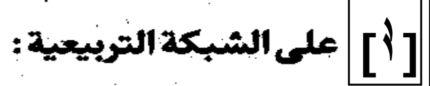
(٢) صورة △ أ ب جـ بالدوران حول و بزاوية ١٨٠
صورة أ بالدوران حول و بزاوية ١٨٠ هى أ// = (....... ، ......)
صورة ب بالدوران حول و بزاوية ١٨٠هى ب // = (....... ، ......)
صورة جـ بالدوران حول و بزاوية ١٨٠هى جـ // = (....... ، ......)

---

(٣) صورة △ أ ب جـ بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠
صورة أ بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠ هى أ/ = (....... ، ......)
صورة ب بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠هى ب / = (....... ، ......)
صورة جـ بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠هى جـ / = (....... ، ......)

إعداد / خالد المنفلوطى ت : ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

تمارين متنوعة على الدوران



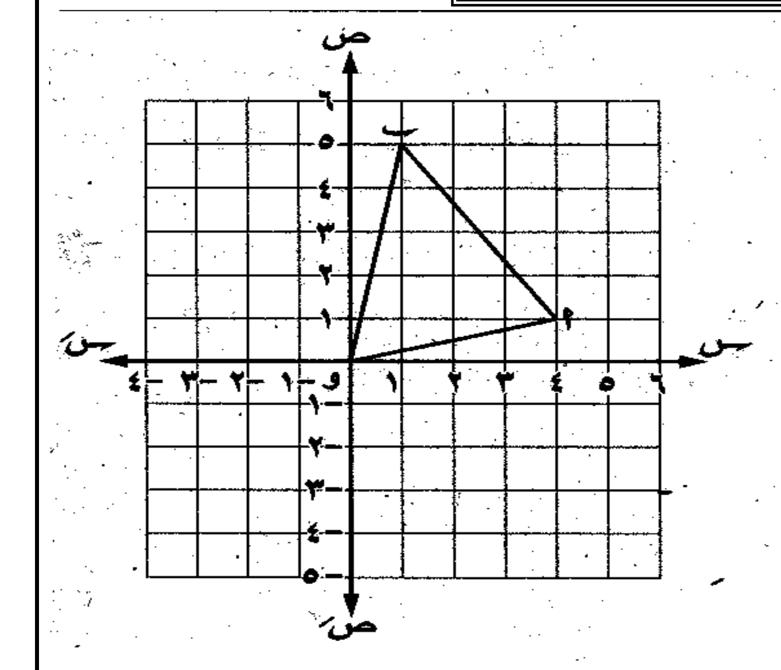
[١] على الشبكة التربيعية :

أوجد صورة المثلث أ و ب بالدوران

حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها :

① ٩٠°

② ١٨٠°



---

٢ في الشكل المقابل :

ارسم صورة المربع أ ب حـ ء

بدوران حول نقطة الأصل (و)

بزاوية قياسها :

① ٩٠°

② ١٨٠°

---

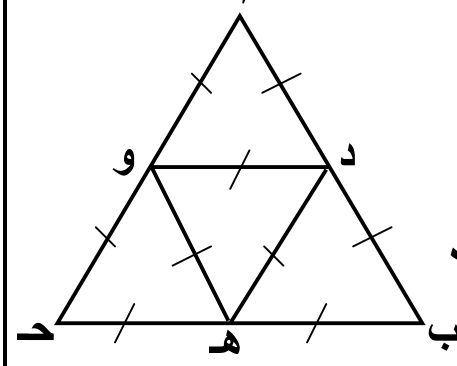
٣ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ (-١ ، -٢) ، ب (٧ ، ٢) ، حـ (٥ ، ٦) ، ء (-٣ ، ٢)

، ارسم على المستوى الإحداثي المستطيل وصورته بالدوران حول نقطة الأصل

حيث : (س ، ص) ⟵ (- ص ، س)

٤ في الشكل المقابل : △ أ ب حـ متساوي الأضلاع ، د ، هـ ، و منتصفات أ ب ، ب حـ ، حـ أ علي الترتيب .

أكمـل ما يأتي :



(١) صورة △ د ب هـ بالانتقال (ب د) هي ....

(٢) △ هـ د ب صورة △ أ د و بدوران حول .... بزاوية قياسها ....

(٣) د هـ صورة أ د بالدوران حول .... بزاوية ...

(٤) صورة △ ب د هـ بالانعكاس في د هـ هي ....

(٥) △ هـ حـ و صورة △ د أ و بالانعكاس في ...

٥ **أكمل ما يأتى:**

(١) صورة النقطة (٢ ، −٣) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هى .... وبزاوية قياسها ١٨٠° هى ....

(٢) صورة النقطة (−١ ، ٠) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هى .... وبزاوية قياسها ٣٦٠° هى ....

(٣) النقطة (٣ ، −٢) هى صورة النقطة (٢ ، ٣) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ....

(٤) صورة النقطة .... بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هى (−١ ، ٤)

(٥) صورة النقطة .... بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها (−١٨٠°) هى (٥ ، −٢)